

إيجاد الجذور الحقيقية والعقدية التقريبية للمعادلات غير الخطية باستخدام منشور تايلور من الدرجة الثالثة

الدكتور نضال إبراهيم الحسن*

□ ملخص □

تم في هذا البحث تقديم طريقتين عدديتين لإيجاد الجذور الحقيقية البسيطة والمضاعفة m مرة بالإضافة إلى الجذور العقدية للمعادلات غير الخطية من الشكل $f(x) = 0$. تعتمد الطريقة الأولى على تقريبات الدالة f بكثيرات حدود تايلور من الدرجة الثالثة حول الجذور المطلوب إيجادها، ثم استخدام طريقة كوردانو وتحويلها إلى علاقات ذات صياغة تكرارية. أما الطريقة الثانية المقترحة فتعتمد على تعديلات لطريقة هالي. تم توصيف الطريقتين المقترحتين بالخوارزميات اللازمة وتنفيذها باستخدام برنامج Mathematica في النسخة 9. اختبرت فعالية الطريقتين المقدمتين بتطبيقهما لإيجاد الجذور التقريبية العقدية والحقيقية البسيطة والمضاعفة m مرة لبعض المسائل، حيث تشير النتائج العددية إلى فعالية ودقة الطريقتين بالمقارنة مع بعض الطرائق الأخرى.

الكلمات المفتاحية: حدودية تايلور من الدرجة الثالثة، طريقة هالي، جذر مضاعف m مرة، طريقة تكرارية، معادلات غير خطية.

Finding the Approximate Real and Complex Roots of Nonlinear Equations by Taylor's Third-Degree Publication

Dr. Nidal E. Hassan *

□ ABSTRACT □

In this paper, we introduce two numerical methods for finding the simple real roots, multiple real roots and complex roots of the nonlinear equations $f(x) = 0$. The first method is based on approximations the function f by third Taylor polynomial about the roots of the nonlinear equations. After that, Gordano method is used which is transformed to iterative method. The second method is based on modifies of Halley method. The two algorithms are designed of the presented methods, and programming *Mathematica* Version 9 is used.

Numerical experiments are given for finding the simple real roots, multiple real roots and complex roots of some test problems. Comparisons of the results obtained by two methods with other methods illustrate the efficiency and highly accurate of the proposed methods.

Key Words: *Third Taylor Polynomial, Halley method, Multiple root of multiplicity m , Iterative method, Nonlinear equations.*

* Assistant Prof, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Al-Baath Universty, Homes, Syria.

مقدمة

تؤول دراسة كثير من الأكاديميين وطلاب الدراسات العليا الباحثين في مجالات علمية مختلفة في فروع الهندسية والفيزياء والميكانيك وعلوم كثيرة إلى نماذج رياضية من المعادلات غير الخطية، وعندئذ يتطلب إيجاد حلول لهذه المعادلات، ولكن المشكلة التي تواجه هؤلاء الباحثين هي أن الحلول التحليلية الدقيقة للمعادلات المذكورة ليست متاحة في معظم الأحيان، لهذا يلجأ الباحثون في مجال التحليل العددي لتقديم طرائق تقريبية وتوصيفها بخوارزميات وبرمجتها حاسوبيا لإيجاد الحلول العددية لها. إن الفكرة العامة للبحث تتمثل بتقديم طرائق عددية فعالة، تتسم بالدقة وسرعة الأداء، لإيجاد الجذور الحقيقية والعقدية للمعادلات غير الخطية من الشكل:

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

قدم الرياضيون الأوائل مجموعة من الطرائق العددية لحل المسألة المطروحة تدعى بالطرائق الأساسية نذكر منها، طريقة تنصيف المجال، طريقة القواطع، طريقة نيوتن، طريقة هالي [2]، استطاعت هذه الطرائق تقديم حلول عددية للمسألة (1)، وبتفاوت بسيط فيما بينها في الفعالية، ولكنها بشكل عام بطيئة التقارب وخاصة عندما تكون الدالة f ذات صياغة تحليلية معقدة.

فُدم مؤخرًا في السنوات القليلة الماضية العديد من الدراسات والأبحاث التي تهدف إلى تطوير طرائق عددية لتقديم حلول عددية فعالة وسريعة التقارب للمسألة المطروحة (1)، فعلى سبيل المثال: قدم Yun في [12] طريقة عددية لإيجاد الجذور الحقيقية المضاعفة m مرة، اعتمدت هذه الطريقة على تحويل المعادلة التي تملك m جذرا مضاعفا إلى معادلة أخرى تملك جذراً بسيطاً، ثم تطبيقها وفق تقنية ذات صياغة تكرارية. درس Heydari وآخرون في [3] التقارب لعائلة من الطرائق من المرتبة الثالثة بغية إيجاد الجذور الحقيقية المضاعفة m مرة، حيث تمت صياغة الطرائق وفق تقنية تكرارية اعتمدت على تقييمات الدالة f ومشتقاتها حتى المرتبة الثانية.

اقترح Rump and Oishi في [9] طريقة تعتمد على قاعدة منشور تايلور للدالة f حول نقطة ما قريبة من الحل، استخدمت هذه الطريقة لإيجاد الجذور الحقيقية المضاعفة.

درس Biazar and Ghanbari في [1] طريقة من المرتبة الخامسة لإيجاد الجذور الحقيقية البسيطة، تعتمد على طريقة نيوتن الأساسية، وعلى تقييمات الدالة f ومشتقاتها الأولى في متتالية من النقاط.

اقترح Rahimian وآخرون في [8] طريقة لإيجاد الجذور الحقيقية، مبنية على قاعدة دالة Homotopy وعلى النقطة الثابتة وفق تقنية تكرارية اعتمدت على تقييمات الدالة f ومشتقاتها حتى المرتبة الثانية.

أنشأ Neta وآخرون في [6] طريقة مركبة من طريقتي نيوتن وهالي من المرتبة الثالثة لإيجاد الجذور الحقيقية البسيطة. قدم Thunder and Mandal في [10] طريقة التنبؤ والتصحيح المعدلة لإيجاد الجذور الحقيقية، وهذه الطريقة مركبة من طريقتي Ujević و هالي.

أثبت Liu and Zhou في [5] عائلة من الطرائق من المرتبة الرابعة لإيجاد الجذور الحقيقية المضاعفة m مرة، تعتمد على طريقة نيوتن المعدلة، وعلى تقييمات الدالة f ومشتقاتها الأولى.

أوجد Kafash and Hosseini في [4] خوارزمية التنبؤ والتصحيح لإيجاد الجذور الحقيقية، تعتمد هذه الخوارزمية على قاعدة تقارب طريقة تحليل أدوميان وعلى إنشاء متتالية من كثيرات حدود أدوميان التقريبية للدالة

f .

درس Noor and Shah في [7] طرائق ذات صياغة تكرارية لإيجاد الجذور الحقيقية المضاعفة، تقوم هذه التقنية على طريقتي نيوتن و هالي وعلى قاعدة تغيير المتحول. قبل البدء بشرح الطرائق المقترحة نقدم التعاريف الأساسية الآتية:

تعريف 1 (الجذر المعزول)

يُقال إن العدد r هو جذر معزول للمعادلة (1) في المجال $[a, b]$ إذا كان هذا الجذر هو الوحيد للمعادلة المذكورة في تلك المجال.

تعريف 2 (الجذر المضاعف)

ليكن $f \in C^m[a, b]$ ، يُقال إن العدد r هو جذر مضاعف m مرة للمعادلة (1) في المجال $[a, b]$ إذا وفقط إذا كان:

$$f(r) = f'(r) = f''(r) = \dots = f^{(m-1)}(r) = 0$$

وكان $f^{(m)}(r) \neq 0$.

تعريف 3 (التقارب)

لنكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية لانتهائية من الأعداد الحقيقية أو العقدية، يُقال إن المتتالية تتقارب إلى العدد r (يدعى نهايتها) إذا كان لأجل أي عدد صغير موجب eps يوجد عدد صحيح موجب $N(eps)$ ، بحيث يتحقق:

$$|x_n - r| < eps, \quad \forall n > N(eps)$$

وعندئذ نكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$ للدلالة إلى أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تتقارب إلى r .

تعريف 4 (التقارب من المرتبة α)

بفرض أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية تتقارب إلى r ، وأن $e_n = x_n - r$ من أجل كل $n \geq 1$ ، إذا وجد عدنان موجبان α, λ بحيث يتحقق:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = \lambda$$

عندئذ يُقال إن المتتالية تتقارب إلى r من المرتبة α بثابت خطأ تقارب λ .

وبشكل عام فإن الطريقة التي تملك مرتبة تقارب عالية تكون أسرع تقاربا من الطريقة التي تملك مرتبة تقارب منخفضة، وعندئذ فإن مرتبة التقارب هي التي تميز بين الطرائق من حيث الدقة العددية والأفضلية. وبشكل خاص إذا كان $\alpha = 1$ فإن الطريقة التي تحقق ذلك يدعى تقاربها خطيا، وإذا كان $\alpha = 2$ فيدعى التقارب تربيعي.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث بأنه يتناول إيجاد جميع الجذور الحقيقية البسيطة والمضاعفة m مرة بالإضافة إلى الجذور العقدية للمعادلات غير الخطية أيا كان شكل الدالة غير الخطية f ، وهذا ما يميز هذا البحث عن الأبحاث الكثيرة الأخرى التي ركزت بشكل خاص على إيجاد الجذور الحقيقية. كما نهدف إلى تقديم طريقتين فعاليتين تتميزان بمرتبة تقارب عالية وبسرعة هذا التقارب، علاوة على امتلاكهما القدرة على إيجاد الجذور العقدية بفعالية وبدقة عالية بالإضافة إلى الجذور الحقيقية سواء كانت بسيطة أو مضاعفة أكثر من مرة.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طرائق البحث على تقريبات الدالة f للمسألة المطروحة بكثيرات حدود تايلور من الدرجة الثالثة حول الجذور المطلوب إيجادها سواء كانت حقيقية أو عقدية ، ثم تطوير طريقتا كوردانو وهالي وتحويلها إلى علاقات ذات صياغات تكرارية، ثم كتابة خوارزمياتهما وتنفيذهما باستخدام إحدى أكثر لغات البرمجة تطورا .

النتائج والمناقشة:

نقدم في هذه الفقرة صياغة تحليلية لطريقتين عدديتين تكراريتين وتوصيفهما بالخوارزميات المناسبة وتنفيذهما برمجيا باستخدام برنامج Mathematica النسخة التاسعة.

صياغة الطريقة العددية الأولى:

تعطى طريقة نيوتن- رافسون بالعلاقة التكرارية الآتية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \dots$$

وكما هو معروف فإن طريقة هالي (Halley's method) تعد نموذجا مطورا ومسرعا لتقارب طريقة نيوتن- رافسون التي تعطى بالعلاقات التكرارية الآتية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{1}{2}t_{n+1}f''(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \dots \quad (2a)$$

حيث يحسب المجهول t_{n+1} من طريقة نيوتن- رافسون بالشكل:

$$t_{n+1} = x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2b)$$

تتقارب طريقة هالي المعطاة بالعلاقين (2a)-(2b) إلى الجذر r عندما يسعى n إلى اللانهاية، ونكتفي بالجذر التقريبي x_N الذي نحصل عليه في التكرار N إذا تحقق أحد المعيارين:

$$\begin{aligned} |x_N - x_{N-1}| &< eps \\ f(x_N) &< eps \end{aligned} \quad (3)$$

حيث eps مقدار صغير موجب، يستخدم كشرط توقف لخوارزمية الطريقة، ويعبر عن الدقة في الحل العددي كلما كان صغيرا.

وللحصول على صيغة مطورة لطريقة هالي نفرض أن $f \in C^4[a, b]$ ، أي أن f قابلة للاشتقاق أربع مرات متتالية على المجال $[a, b]$ ، وليكن $x_n \in [a, b]$ جذراً تقريبياً للجذر الحقيقي r للمعادلة غير الخطية (1) ، بحيث يكون $|x_n - r|$ صغيرا بقدر كاف.

ننشر $f(x)$ حول x_n ونكتفي بالحدود الأربعة الأولى:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2} f''(x_n) + \\ & \frac{(x - x_n)^3}{6} f'''(x_n) + \frac{(x - x_n)^4}{24} f^{(4)}[\xi(x)] \end{aligned}$$

حيث $\xi(x)$ تنتمي إلى المجال الذي يقع بين x و x_n .

وبما أن r جذر للمعادلة يكون $f(r)=0$ ، إذن بتعويض كل x بـ r في المنشور السابق نحصل على:

$$0 = f(x_n) + (r - x_n)f'(x_n) + \frac{(r - x_n)^2}{2} f''(x_n) + \frac{(r - x_n)^3}{6} f'''(x_n) + \frac{(r - x_n)^4}{24} f^{(4)}[\xi(x)]$$

فإذا حذفنا الحد الأخير الباقي من منشور تايلور، ونضع بشكل تقريبي $x_{n+1} \approx r$ ، ويمكننا عندئذ كتابة المعادلة الأخيرة وفق العلاقة التكرارية الآتية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)f''(x_n) + \frac{1}{6}(x_{n+1} - x_n)^2 f'''(x_n)} \quad (4)$$

ولحساب المجهول x_{n+1} الوارد في الحدين المتتاليين لمقام الطرف الأيمن من العلاقة (4)، نحصل عليه بحسابه من تكرارية هالي العلاقة (2a) كالتالي:

$$t_{n+1} = x_{n+1} - x_n = - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{1}{2}t_{n+1}f''(x_n)} \quad (5)$$

وعندئذ تعطى صيغة هالي المعدلة بالعلاقة التكرارية الآتية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{1}{2}t_{n+1}f''(x_n) + \frac{1}{6}t_{n+1}^2 f'''(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N, \dots \quad (6)$$

حيث إن x_0 نقطة اختيارية قريبة كفاية من الجذر المطلوب إيجاده .

ففي حالة الجذور مضاعفة $m > 1$ مرة، فإن t_{n+1} الوارد في الطرف الأيمن من العلاقة (5) يحسب بالعلاقة:

$$t_{n+1} = -m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (7)$$

وإذا كانت الجذور بسيطة فإن $m=1$.

وبتطبيق العلاقات (5) - (7) بشكل تكراري، نحصل على متتالية من القيم التكرارية :

$$x_1, x_2, \dots, x_N, \dots$$

التي تكون متقاربة من الجذر الحقيقي r ، ونعتبر أن x_N هو الجذر التقريبي المطلوب إذا تحقق أحد المعيارين (3).

صياغة الطريقة العددية الثانية:

تعتمد الطريقة الثانية على تقريبات الدالة f بكثيرات حدود تايلور من الدرجة الثالثة حول الجذر المطلوب

إيجاده، ثم استخدام طريقة كوردانو وتحويلها إلى علاقات ذات صياغة تكرارية. لتوضيح هذه الطريقة نتبع الآتي:

بفرض أن $f \in C^4[a, b]$ ، ننشر الدالة f حول النقطة $x_n \in [a, b]$ وفق تايلور مع الاكتفاء بالحدود

الأربعة الأولى، نحصل على الصيغة الآتية :

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + (x - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + (x - x_n)^3 \frac{f'''(x_n)}{3!} + (x - x_n)^4 \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \equiv 0 \quad (8)$$

حيث c ينتمي إلى المجال الذي يقع بين x و x_n .

و بما أن x تقع في جوار x_n ، نضع $x = x_{n+1}$ ، ونكتب العلاقة (8) بالصيغة التدريجية كالتالي :

$$f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + (x_{n+1} - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + (x_{n+1} - x_n)^3 \frac{f'''(x_n)}{3!} + (x_{n+1} - x_n)^4 \frac{f^{(4)}(c_n)}{4!} = 0$$

وبإهمال الحد الباقي الأخير (لصغره) والاكتماء بالحدود الأربعة الأولى نكتب بشكل تقريبي:

$$f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 f''(x_n) + \frac{1}{6}(x_{n+1} - x_n)^3 f'''(x_n) = 0$$

و بفك الأقواس و عزل x_{n+1} ، x_{n+1}^2 ، x_{n+1}^3 ، و الحد الثابت نجد أن:

$$f(x_n) + f'(x_n)x_{n+1} - f'(x_n)x_n + \frac{1}{2}f''(x_n)(x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_n + x_n^2) + \frac{1}{6}f'''(x_n)(x_{n+1}^3 - 3x_{n+1}^2x_n + 3x_n^2x_{n+1} - x_n^3) = 0$$

و التي تكتب أيضا بالشكل :

$$\left[\frac{1}{6}f'''(x_n)\right]x_{n+1}^3 + \left[\frac{1}{2}f''(x_n) - \frac{1}{2}f'''(x_n)x_n\right]x_{n+1}^2 + [f'(x_n) - f''(x_n)x_n + \frac{1}{2}f'''(x_n)x_n^2]x_{n+1} + [f(x_n) - f'(x_n)x_n + \frac{1}{2}f''(x_n)x_n^2 - \frac{1}{6}f'''(x_n)x_n^3] = 0$$

وتكتب بشكل مختصر بالعلاقة :

$$A_n x_{n+1}^3 + B_n x_{n+1}^2 + C_n x_{n+1} + D_n = 0 \quad (9)$$

حيث :

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{6}f'''(x_n) \\ B_n = \frac{1}{2}f''(x_n) - \frac{1}{2}f'''(x_n)x_n \\ C_n = f'(x_n) - f''(x_n)x_n + \frac{1}{2}f'''(x_n)x_n^2 \\ D_n = f(x_n) - f'(x_n)x_n + \frac{1}{2}f''(x_n)x_n^2 - \frac{1}{6}f'''(x_n)x_n^3 \end{cases} \quad (9a)$$

و بالتالي فإن حل المعادلة (9) هو حل تقريبي للمعادلة غير الخطية (1)، و لحل المعادلة (9) نحذف

الحد الذي يحوي x_{n+1}^2 و ذلك بإجراء التحويل :

$$x_{n+1} = \frac{(y_{n+1} - B_n)}{3A_n} \quad (10)$$

مع افتراض أن $A_n \neq 0$.

لتأخذ المعادلة (9) بعد التحويل الصيغة الآتية :

$$\frac{1}{27A_n^2}y_{n+1}^3 + \left[\frac{C_n}{3A_n} - \frac{B_n^2}{9A_n^2}\right]y_{n+1} + \left[\frac{2B_n^3}{27A_n^2}\right] - \frac{C_n B_n}{3A_n} + D_n = 0$$

وللاختزال نضرب طرفي المعادلة بـ $27A_n^2$ ، فنحصل على الصيغة :

$$y_{n+1}^3 + (9A_n C_n - 3B_n^2)y_{n+1} + (2B_n^3 - 9A_n C_n B_n + 27A_n^2 D_n) = 0$$

و التي يمكن التعبير عنها بالصيغة المختصرة:

$$y_{n+1}^3 + p_n y_{n+1} + q_n = 0 \quad (11)$$

حيث:

$$\begin{cases} p_n = 9A_n C_n - 3B_n^2 \\ q_n = 2B_n^3 - 9A_n C_n B_n + 27A_n^2 D_n \end{cases} \quad (11a)$$

و سترتبع طريقة كوردانو لحل المعادلة (11)، ونجد أن عدد الجذور الحقيقية للمعادلة من الدرجة الثالثة يرتبط بإشارة المميز :

$$\Delta_n = \left(\frac{p_n}{3}\right)^3 + \left(\frac{q_n}{2}\right)^2 \quad (12)$$

و هنا نميز ثلاث حالات :

الحالة الأولى : $\Delta_n > 0$ يكون للمعادلة التكعيبية (11) جذراً حقيقياً واحداً، وجذران عقديان مترافقان يكتبان بالشكل :

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = u_n + v_n \\ y_{n+1}^{(2)} = -\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n - v_n}{2} i\sqrt{3} \\ y_{n+1}^{(3)} = -\frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n - v_n}{2} i\sqrt{3} \end{cases} \quad (13)$$

حيث إن :

$$\begin{cases} u_n = \sqrt[3]{-\left(\frac{q_n}{2}\right) + \sqrt{\Delta_n}} \\ v_n = \sqrt[3]{-\left(\frac{q_n}{2}\right) - \sqrt{\Delta_n}} \end{cases} \quad (14)$$

الحالة الثانية : $\Delta_n < 0$ يكون للمعادلة (11) ثلاثة جذور حقيقية ، تعطى هذه الجذور بحسب إشارة p_n وفق الحالتين الآتيتين :

(I) $p_n > 0$ و هنا نفرض أن :

$$\begin{cases} \theta_n = \arccos\left(-\frac{q_n}{2\rho_n}\right) \\ \rho_n = -\sqrt[3]{\frac{p_n^3}{27}} \end{cases} \quad (15)$$

وتعطى جذور المعادلة (11) في هذه الحالة بالشكل:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = 2\sqrt[3]{\rho_n} \cos\left(\frac{\theta_n}{3}\right) \\ y_{n+1}^{(2)} = 2\sqrt[3]{\rho_n} \cos\left[\left(\frac{\theta_n}{3}\right) + \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ y_{n+1}^{(3)} = 2\sqrt[3]{\rho_n} \cos\left[\left(\frac{\theta_n}{3}\right) + \left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] \end{cases} \quad (16)$$

(II) $p_n < 0$ و هنا نفرض أن :

$$\begin{cases} \theta_n = \arccos\left(\frac{q_n}{2\rho_n}\right) \\ \rho_n = (\text{sign } q_n)\sqrt{|P_n|/3} \end{cases} \quad (17)$$

وتعطى جذور المعادلة (11) في هذه الحالة بالشكل:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = -2\rho_n \cos(\theta_n/3) \\ y_{n+1}^{(2)} = -2\rho_n \cos[(\theta_n/3) + (2\pi/3)] \\ y_{n+1}^{(3)} = -2\rho_n \cos[(\theta_n/3) + (4\pi/3)] \end{cases} \quad (18)$$

الحالة الثالثة: $\Delta_n = 0$ ، يكون للمعادلة ثلاثة جذور حقيقية، (جذران مضاعفان، وجذر مختلف) وتعطى هذه

الجذور، بحسب قيمة P_n و q_n وفق الحالتين:

(I) $P_n \neq q_n$ وهنا يكون:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} = u_n + v_n \\ y_{n+1}^{(2)} = y_{n+1}^{(3)} = -\frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad (19)$$

حيث :

$$u_n = v_n = \left[-\left(\frac{q_n}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \quad (20)$$

(II) $P_n = q_n$ ، يكون للمعادلة ثلاثة جذور مضاعفة:

$$y_{n+1}^{(1)} = y_{n+1}^{(2)} = y_{n+1}^{(3)} = -\frac{u_n + v_n}{2} \quad (21)$$

حيث : $u_n = v_n = \left[-\left(\frac{q_n}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$.

في كل الحالات الثلاث السابقة الحلول العددية $y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(2)}, y_{n+1}^{(3)}$ للمعادلة (11) ، تحسب وتعوض بشكل تدريجي في العلاقة (10) التي يمكن إعادة كتابتها بالشكل:

$$x_{n+1}^{(i)} = \frac{(y_{n+1}^{(i)} - B_n)}{3A_n}, \quad i = 1, 2, 3; \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \dots \quad (22)$$

تعطي العلاقات (22) الحل التقريبي للمعادلة غير الخطية (1)، من أجل x_0 نقطة اختيارية قريبة من الجذر المطلوب بقدر كاف، وجميع القيم $y_{n+1}^{(i)}$ ، u_n, v_n ، A_n, B_n معروفة ومعلومة .

كما سنكتفي بالتكرار N ، ونعتبر أن $x_N^{(i)}$ ، $i = 1, 2, 3$ هو الجذر التقريبي المطلوب إذا تحقق إحدى المعيارين:

$$\begin{cases} |x_N^{(i)} - x_{N-1}^{(i)}| < eps, \\ |f(x_N^{(i)})| < eps \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

ملاحظة 1: وفق هذه الطريقة يكون التكرار التقريبي للجذر الحقيقي هو $x_{n+1}^{(1)}$ ، وإذا كان عقديا يكون الجذر ومرافقه

هو $x_{n+1}^{(2)}, x_{n+1}^{(3)}$.

سنقوم الآن بتوصيف الطريقتين المقترحتين بالخوارزميات المناسبة لتصبحا سهلتا القراءة والتطبيق على الحاسب.

خوارزمية 1:

تعد هذه الخوارزمية توصيف للطريقة المقترحة الأولى، و يمكن تلخيصها بالنقاط الآتية:

- 1- المدخلات : x_0 نقطة ابتدائية اختيارية، eps مقدار صغير موجب، m عدد صحيح موجب يعبر عن عدد مرات تكرار الجذر، نضع $n=0$.
- ويمكن تعريف الدالة $f(x)$ بالشكل:

Function $f(x:real):real$;

Begin

$f:=expression$ (التصريح عن الدالة)

End;

2- نحسب $t_{n+1} = -m * f(x_n) / f'(x_n)$ من العلاقة (5).

3- نحسب $tt_{n+1} = - f(x_n) / (f'(x_n) + 0.5 * t_{n+1} * f''(x_n))$ من العلاقة (7).

4- نحسب من العلاقة (6):

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / (f'(x_n) + 0.5 * tt_{n+1} * f''(x_n) + (1/6) * tt_{n+1}^2 * f'''(x_n))$$

5- طباعة النتائج x_{n+1} ، $f(x_{n+1})$ ، $Abs(x_{n+1} - x_n)$.

6- إذا كان $f(x_{n+1})=0$ يكون x_{n+1} هو الحل الدقيق وننتقل إلى الخطوة 8.

- 7- نختبر الشرط $Abs(x_{n+1} - x_n) < eps$ إذا لم يكن محققا نضع $n:=n+1$ ثم نعود للتكرار بدءا من الخطوة 2.
- 8- النهاية.

خوارزمية 2:

هي توصيف للطريقة المقترحة الثانية، و يمكن تلخيصها بالنقاط الآتية:

- 1- المدخلات: x_0 نقطة ابتدائية اختيارية، eps مقدار صغير موجب، نضع $n=0$.
- ويمكن تعريف الدالة $f(x)$ بالشكل:

Function $f(x:real):real$;

Begin

$f:=expression$ (التصريح عن الدالة)

End;

2- نحسب A_n, B_n, C_n, C_n معاملات المعادلة (9) من العلاقات (9a).

3- نحسب P_n, q_n معاملات المعادلة (11) من العلاقات (11a).

4- نحسب المميز Δ_n من العلاقة (12).

5- إذا كان $\Delta_n > 0$ عندئذ نكون أمام الحالة الأولى نحسب u_n, v_n من العلاقات (14)،

ونحسب $y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(2)}, y_{n+1}^{(3)}$ من العلاقات (13).

6- إذا كان $\Delta_n < 0$ عندئذ نكون أمام الحالة الثانية، وهنا نميز حالتين:

إذا كان $p_n > 0$ عندئذ :

نحسب θ_n, ρ_v من العلاقات (15)، ونحسب $y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(2)}, y_{n+1}^{(3)}$ من العلاقات (16)،

وإلا إذا كان $p_n < 0$ عنديذ:

نحسب θ_n, ρ_v من العلاقات (17)، ونحسب $y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(2)}, y_{n+1}^{(3)}$ من العلاقات (18).

7- إذا كان $\Delta_n = 0$ عندئذ نكون أمام الحالة الثالثة، وهنا أيضا نميز حالتين:

إذا كان $p_n \neq q_n$ عندئذ:

نحسب u_n, v_v من العلاقات (20)، ونحسب $y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(2)}, y_{n+1}^{(3)}$ من العلاقات (19)،

وإلا إذا كان $p_n = q_n$ عنديذ:

نحسب u_n, v_v من العلاقات (20)، ونحسب $y_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(2)}, y_{n+1}^{(3)}$ من العلاقات (21)

8- نحسب $x_{n+1}^{(1)}, x_{n+1}^{(2)}, x_{n+1}^{(3)}$ من العلاقات (22)، وهنا يكون التكرار التقريبي $x_{n+1}^{(1)}$ إذا كان حقيقيا، ويكون

$x_{n+1}^{(2)}, x_{n+1}^{(3)}$ إذا كان عقديا.

9- طباعة النتائج $x_{n+1}^{(1)}, x_{n+1}^{(2)}, x_{n+1}^{(3)}$ ، $f(x_{n+1}^{(i)})$ ، $\text{Abs}(x_{n+1}^{(i)} - x_n^{(i)})$ من أجل $(i=1,2,3)$.

10- إذا كان $f(x_{n+1}^{(i)})=0$ يكون $x_{n+1}^{(i)}$ ($i=1,2,3$) هو الحل الدقيق تنتقل إلى الخطوة 12.

11- نختبر الشرط $\text{Abs}(x_{n+1}^{(i)} - x_n^{(i)}) < \text{eps}$ من أجل $(i=1,2,3)$ إذا لم يكن محققا نضع $n:=n+1$

ثم نعود للتكرار بدءا من الخطوة 2.

12- النهاية.

ملاحظة 2: إن استخدام لغة متطورة وعالية المستوى مثل لغة Mathematica توفر لمستخدميها كثير من المعاناة

والجهد وتغنيهم من الدخول في تفاصيل لغات البرمجة الأساسية المملة مثل لغة باسكال وغيرها وتختصر أيضا

كتابة كثير من الإجراءات التي توفرها هذه اللغة في مكتباتها.

سنقوم الآن بتنفيذ الخوارزمية 1 و الخوارزمية 2 باستخدام هذه اللغة، موضحين ذلك تطبيقيا بافتراض أن المطلوب

إيجاد الحل العددي للمعادلة غير الخطية:

$$f(x) = x^{10} - \frac{30}{31}x^6 - 2x^5 + \frac{225}{961}x^2 + \frac{30}{31}x + 1 = 0, \quad x_0=3$$

البرنامج 1 باستخدام لغة Mathematica للخوارزمية 1:

```
Clear[f,x,x0,xn]
f[x_]= x^10-30/31x^6-2x^5+225/961 x^2+30/31x+1;
x0=3.0;m=2;itr=7;
Print["x0=",x0," fx0=",Abs[f[x0]]," f'x0=",f'[x0]]
For[n=1,n<=r,
tn=-m f[x0]/f'[x0];
ttn=-f[x0]/(f'[x0]+0.5 tn*f''[x0]);
xn=x0-f[x0]/(f'[x0]+0.5 ttn*f''[x0]+
ttn^2*f'''[x0]/6);
Print["x",n,"=",xn," fx",n,"=",Abs[f[xn]],
" f'(xn)",Abs[f'[xn]], " f''(xn)",
Abs[f''[xn]]," xn+1-xn=",Abs[xn-x0] ];
x0=xn; Clear[xn];
```

n++]

:Mathematica تنفيذ الخوارزمية 2 باستخدام لغة

```
Clear[f,x,y,sol,An, Bn, Cn,Dn,xn,Pn,qn]
f[x_]=x^10-30/31 x^6-2x^5+225/961 x^2+30/31x+1;
Plot[f[x],{x,1.1,3}]
m=4;itr=15;
xn=3.0; x0=xn;
For[n=0,n<itr,
  An=1/6f'''[xn];
  Bn=1/2f''[xn]-1/2f'''[xn] xn;
  Cn=f'[xn]-f''[xn] xn+1/2f'''[xn] xn^2;
  Dn=f[xn]-f'[xn] xn+1/2f''[xn] xn^2-1/6 f'''[xn] xn^3;
  Pn=9An Cn-3 Bn^2;
  qn=2Bn^3-9An Cn Bn+27 An^2 Dn;
  sol=NSolve[ y^3+Pn y+qn==0,y,Reals];
  t=(y-Bn)/(3An)/.sol[[1]];
  Print["x",n,"=",t," f(x",n,")=" ,Abs[f[t]],
  " f'(xn)=" ,Abs[f'[t]],
  " Xn+1-Xn=" ,Abs[t-xn]];
  xn=t; Clear[t,y];
  n++]
```

النتائج العددية

نختبر فعالية ودقة الخوارزميتين الأولى والثانية المقترحتين بتنفيذ البرنامج 1 و البرنامج 2 لحل بعض المعادلات غير الخطية ومقارنة النتائج التي سنتوصل إليها مع نتائج بعض الطرائق الأخرى.

المثال 1: [7] : لتكن المعادلة غير الخطية الآتية:

$$f(x) = x^{10} - \frac{30}{31}x^6 - 2x^5 + \frac{225}{961}x^2 + \frac{30}{31}x + 1 = 0$$

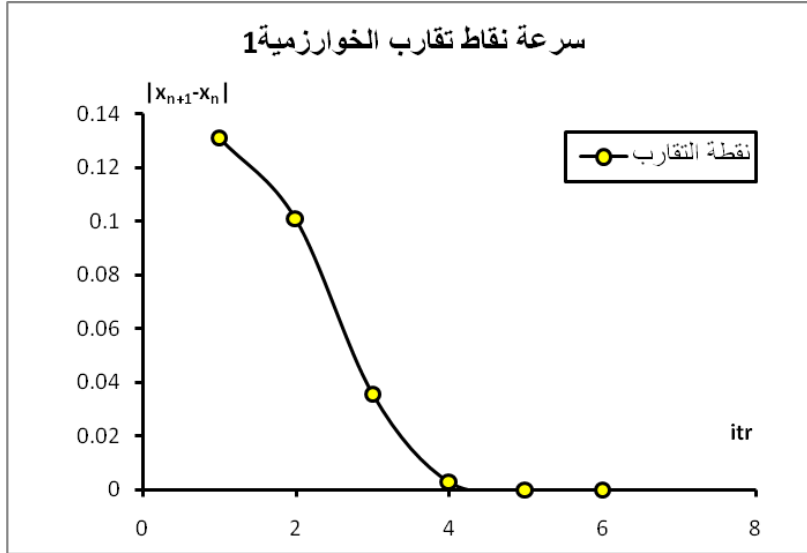
يوجد لهذه المعادلة جذر حقيقي واحد مضاعف وأربعة جذور عقدية مضاعفة . تم استخدام الخوارزمية 1 والخوارزمية 2 المقترحتين لإيجاد الجذر الحقيقي المضاعف، وتمت مقارنة النتائج لتلك الخوارزميتين مع نتائج خمس طرائق أخرى وتسجيل النتائج في الجدول (1). ندرج في الجدول (2) نتائج الخوارزميتين المقترحتين في إيجاد جذر عقدي مضاعف والمقارنة مع طريقتي هالي ونيوتن-رافسون . بمقارنة نتائج الجدولين (1) و (2) نتضح دقة وأفضلية نتائج الخوارزميتين المقترحتين. نبين في الشكل (1) سرعة تقارب الخوارزمية 1 باستخدام المعيار $|x_{n+1} - x_n|$. ونوضح في الشكل (2) سرعة تقارب الخوارزمية 2 في إيجاد جذر عقدي مضاعف باستخدام المعيار $|x_{n+1} - x_n|$

الجدول 1: إيجاد الجذر الحقيقي المضاعف للمثال 1 باستخدام الخوارزميتين المقترحتين ومقارنات مع عدد من الطرائق الأخرى .

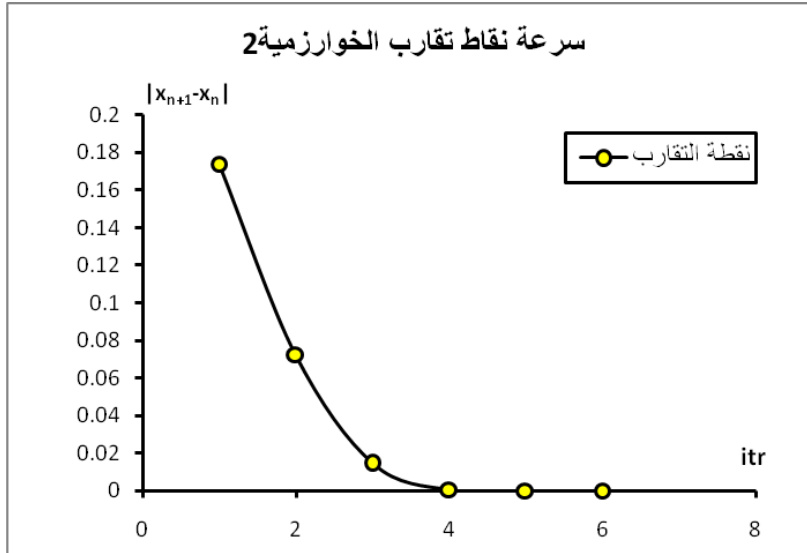
الطريقة المستخدمة	عدد التكرارات itr	الحل التقريبي x_n	قيمة الدالة $ f(x_n) $	الفرق بين تكرارين $\delta = x_{n+1} - x_n $	مرتبة التقارب
الخوارزمية 1 المقترحة	5	1.08829	0	0	3.0780
الخوارزمية 2 المقترحة	7	1.08829	0	0	3.0000
الخوارزمية 2.2 [7]	6	1.08828	0.00 E-01	1.73 E-20	2.0010
طريقة نيوتن المعدلة [11]	7	1.08828	0.00 E-01	2.21 E-18	1.9241
طريقة هالي [10]	15	1.08829	7.0317E-12	8.1221E-7	0.96205
طريقة نيوتن-رافسون [11]	20	1.08830	6.716 E-09	1.2548E-5	0.641367
طريقة القواطع [2]	20	فشل	فشل	فشل	فشل
طريقة تنصيف المجال [2]	20	فشل	فشل	فشل	فشل

الجدول 2: إيجاد الجذر العقدي المضاعف للمثال 1 باستخدام الخوارزميتين المقترحتين ومقارنات مع طريقي هالي ونيوتن-رافسون .

الطريقة المستخدمة	عدد التكرارات itr	الحل التقريبي x_n	قيمة الدالة $ f(x_n) $	الفرق بين تكرارين $\delta = x_{n+1} - x_n $	مرتبة التقارب
الخوارزمية 1 المقترحة	6	0.238563 ± 1.01256 I	1.13220E-15	5.78382E-09	3.0780
الخوارزمية 2 المقترحة	6	0.238563 ± 1.01256 I	3.14018E-16	5.55112E-17	3.0000
طريقة هالي [10]	15	0.238562 ± 1.01256 I	7.77367E-12	9.99676E-7	0.96205
طريقة نيوتن-رافسون [2]	20	0.238547 ± 1.01256 I	8.1526 E-09	1.61875 E-5	0.641367



الشكل(1): مخطط سرعة تقارب الخوارزمية 1 المقترحة لإيجاد الجذر العقدي المضاعف للمثال(1)



الشكل(2): مخطط سرعة تقارب الخوارزمية 2 المقترحة لإيجاد جذر عقدي مضاعف للمثال(1).

المثال 2: [7]: لتكن المعادلة غير الخطية الآتية:

$$f(x) = (x^3 - 3/4)^3 = 0$$

يوجد لهذه المعادلة جذر حقيقي واحد وجذران عقديان كل منهما مضاعف ثلاث مرات . تم استخدام

الخوارزمية 1 والخوارزمية 2 المقترحتين لإيجاد الجذر الحقيقي المضاعف ثلاث مرات من أجل $x_0=0.5$ ، وتمت

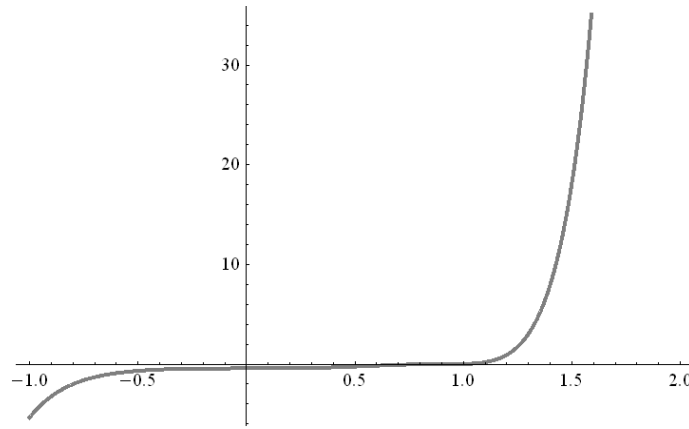
مقارنة نتائج تلك الخوارزميتين مع نتائج لسبع طرائق أخرى وتسجيل النتائج في الجدول (3). ندرج في الجدول(4)

نتائج الخوارزميتين المقترحتين في إيجاد جذر عقدي مضاعف من أجل $x_0=\pm I$ والمقارنة مع طريقي هالي

ونيوتن-رافسون . بمقارنة نتائج الجدولين (3) و(4) تتضح دقة وأفضلية نتائج الخوارزميتين المقترحتين. نبين في

الشكل 4 سرعة تقارب الخوارزمية 1 في إيجاد الجذر الحقيقي المضاعف ثلاث مرات باستخدام المعيار $|f(x_n)|$ ،

و نبين في الشكل 5 سرعة تقارب الخوارزمية 2 في إيجاد جذر عقدي مضاعف ثلاث مرات باستخدام المعيار $|f(x_n)|$.



الشكل(3): رسم المخطط البياني لدالة المثال 2 في المجال [-1,2] وتوضيح صعوبة إيجاد الحل.

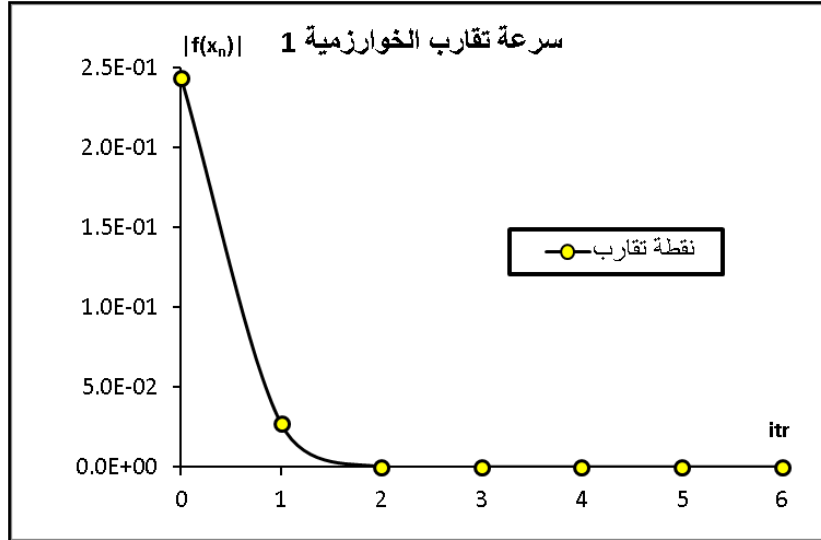
الجدول3: إيجاد الجذر الحقيقي المضاعف ثلاث مرات للمثال 2 باستخدام الخوارزميتين المقترحتين والمقارنات مع طرائق أخرى. x_n .

التكرار <i>itr</i>	مرتبة التقارب	قيمة الدالة $ f(x_n) $	الفرق بين تكرارين $ x_{n+1} - x_n $	الجذر التقريبي x_n	الطريقة المستخدمة
5 6	2.12324	7.0065 E-46 0	1.16615E-08 3.33067E-16	0.90856 0.90856	الخوارزمية 1 المقترحة
6 7	2.12112	3.6948E-44 0	1.2503E-08 1.3322E-15	0.90856 0.90856	الخوارزمية 2 المقترحة
6	2.06156	1.62 E-56	3.05 E-10	0.9085	طريقة نيوتن المعدلة [11]
5	2.43355	1.62 E-38	4.12 E-07	0.9085	خوارزمية 2.2 [7]
5	2.11010	8.41 E-47	1.18 E-08	0.9085	خوارزمية 2.6 [7]
20	0.60839	3.5443 E-19	2.8577 E-07	0.90856	طريقة هالي [10]
25	0.34765	3.5881 E-15	3.091 E-06	0.908554	طريقة نيوتن-رافسون [11]
25	0.103078	1.2223 E-4	2.80918 E-4	0.928174	طريقة القواطع [2]
25	0.222222	1.2686 E-23	2.9802 E-08	0.90856	طريقة تنصيف المجال [2]

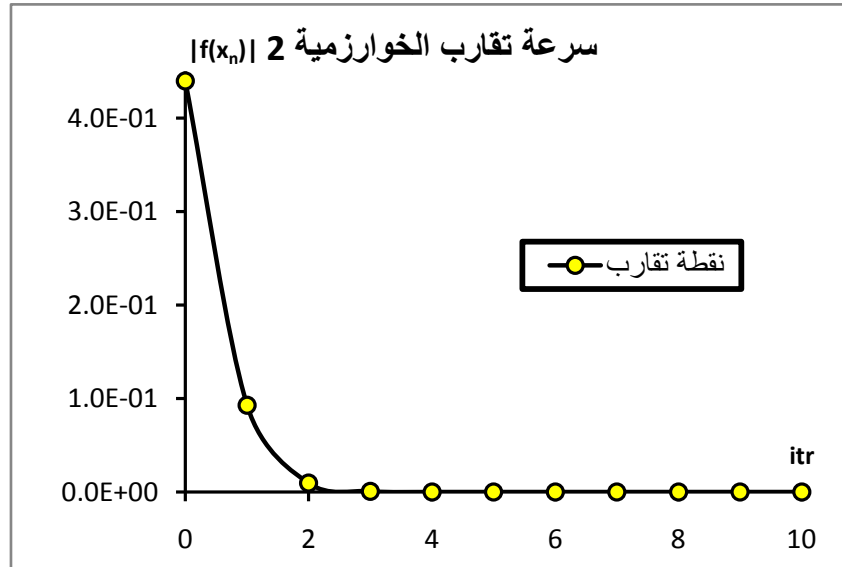
الجدول4: إيجاد الجذرين العقديين المضاعفين ثلاث مرات للمثال 2 باستخدام الخوارزميتين المقترحتين والمقارنات مع طرائق أخرى.

التكرار <i>itr</i>	مرتبة التقارب	الجذر التقريبي x_n	قيمة الدالة $ f(x_n) $	الفرق بين تكرارين $ x_{n+1} - x_n $	الطريقة المستخدمة
6 7	2.0002	-0.45428±0.786836 I -0.45428±0.786836 I	2.5966E-35 1.8713E-48	7.3702 E-07 1.1957 E-12	الخوارزمية 1 المقترحة

9		-0.45428±0.786836 I	6.6526E-42	3.44115E-08	الخوارزمية 2 المقترحة
10	1.99621	-0.45428±0.786836 I	1.2411E-47	7.6551E-15	
20	0.50005	-0.45428±0.786836 I	3.1301 E-19	2.7417 E-07	طريقة هالي [10]
30	0.33337	-0.454279±0.786835I	3.5881 E-15	3.091 E-06	طريقة نيوتن- رافسون [11]



الشكل (4): سرعة تقارب الخوارزمية 1 في إيجاد الجذر الحقيقي المضاعف ثلاث مرات للمثال 2 باستخدام المعيار $|f(x_n)|$.



الشكل (5): سرعة تقارب الخوارزمية 2 في إيجاد الجذر العقدي المضاعف ثلاث مرات للمثال 2 باستخدام المعيار $|f(x_n)|$.

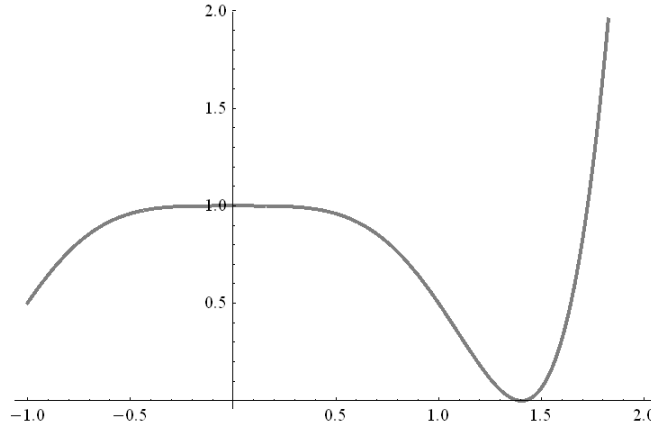
المثال 3: [5]: لنكن المعادلة غير الخطية الآتية:

$$f(x) = (\sin^2(x) - x^2 + 1)^2 = 0$$

استخدمت الخوارزمية 1 والخوارزمية 2 المقترحتان لإيجاد جذرين حقيقيين مضاعفين للمثال 3 من أجل

$x_0 = \pm 2.5$ ، و تمت مقارنة نتائج هاتين الخوارزميتين مع نتائج لست طرائق أخرى وسجلت النتائج في الجدول

(5). ندرج في الجدول (6) نتائج الخوارزميتين المقترحتين في إيجاد جذر عقدي مضاعف من أجل $x_0 = \pm 0.5I$ والمقارنة مع طريقتي هالي ونيوتن-رافسون . بمقارنة نتائج الجدولين (5) و(6) تتضح دقة وأفضلية نتائج الخوارزميتين المقترحتين. نبين في الشكل 7 سرعة تقارب الخوارزمية 1 في إيجاد الجذر العقدي المضاعف للمثال 3 باستخدام المعيار $|f(x_n)|$. ونبين في الشكل 8 سرعة تقارب الخوارزمية 2 في إيجاد الجذر العقدي المضاعف باستخدام المعيار $|f(x_n)|$.



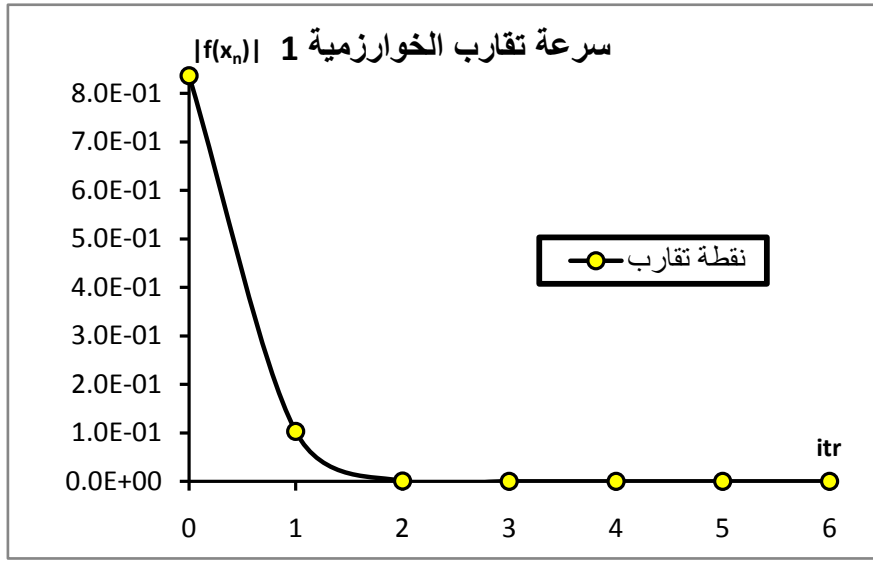
الشكل(6): رسم المخطط البياني لدالة المثال 3 في المجال [-1,2] وتوضيح صعوبة إيجاد الحل.

الجدول 5: إيجاد جذرين حقيقيين مضاعفان للمثال 3 باستخدام الخوارزميتين المقترحتين والمقارنات مع طرائق أخرى.

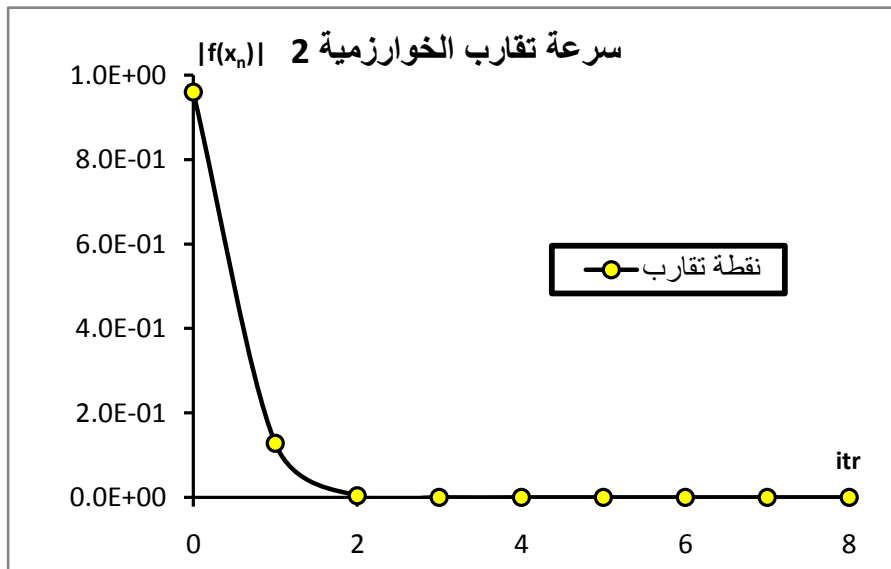
التكرار <i>itr</i>	مرتبة التقارب	الجذر التقريبي x_n	قيمة الدالة $ f(x_n) $	الفرق بين تكرارين $ x_{n+1} - x_n $	الطريقة المستخدمة
5	2.12324	± 1.40449	0 0	1.1093E-31 1.1093E-31	الخوارزمية 1 المقترحة
6 7	2.11689	± 1.40449	6.13514E-08 1.38535E-23	9.97732E-06 1.49902E-12	الخوارزمية 2 المقترحة
9	2.06156	± 1.40449	1.3 E-144	-----	طريقة نيوتن المعدلة [5]
5	2.43355	± 1.40449	6.56 E-133	-----	طريقة SM [5]
20	0.64041	± 1.40449	3.5923 E-19	4.82871 E-10	طريقة هالي [10]
25	0.36594	± 1.40449	1.0355 E-14	4.09917 E-08	طريقة نيوتن- رافسون [11]
فشل	فشل	فشل	فشل	فشل	طريقة القواطع [2]
فشل	فشل	فشل	فشل	فشل	طريقة تصنيف المجال [2]

الجدول 6: إيجاد الجذر العقدي المضاعف للمثال 3 باستخدام الخوارزميتين المقترحتين والمقارنات مع طرائق أخرى. x_n

التكرار <i>itr</i>	مرتبة التقارب	الجذر التقريبي x_n	قيمة الدالة $ f(x_n) $	الفرق بين تكرارين $ x_{n+1} - x_n $	الطريقة المستخدمة
5 6	2.13402	$\pm 1.24897184 I$ $\pm 1.24897184 I$	0 0	4.91414E-09 0	الخوارزمية 1 المقترحة
5 6	2.12976	$\pm 1.24897184 I$ $\pm 1.24897184 I$	7.88861E-29 3.86542E-43	6.92367E-07 6.66134E-16	الخوارزمية 2 المقترحة
20	0.51551	$\pm 1.24897184 I$	3.53179 E-19	3.35788 E-10	طريقة هالي [10]
30	0.35092	$\pm 1.24897185 I$	3.7475 E-17	1.72945 E-09	طريقة نيوتن-رافسون [2]



الشكل (7): سرعة تقارب الخوارزمية 1 في إيجاد الجذر العقدي المضاعف للمثال 3 باستخدام المعيار $|f(x_n)|$.



الشكل (8): سرعة تقارب الخوارزمية 2 في إيجاد الجذر العقدي المضاعف للمثال 3 باستخدام المعيار $|f(x_n)|$.

المثال 4: [3] : لتكن المعادلة غير الخطية الآتية:

$$f(x) = (x \text{Exp}(x^2) - \text{Sin}^2(x) + 3\text{Cos}(x) + 5)^4 = 0$$

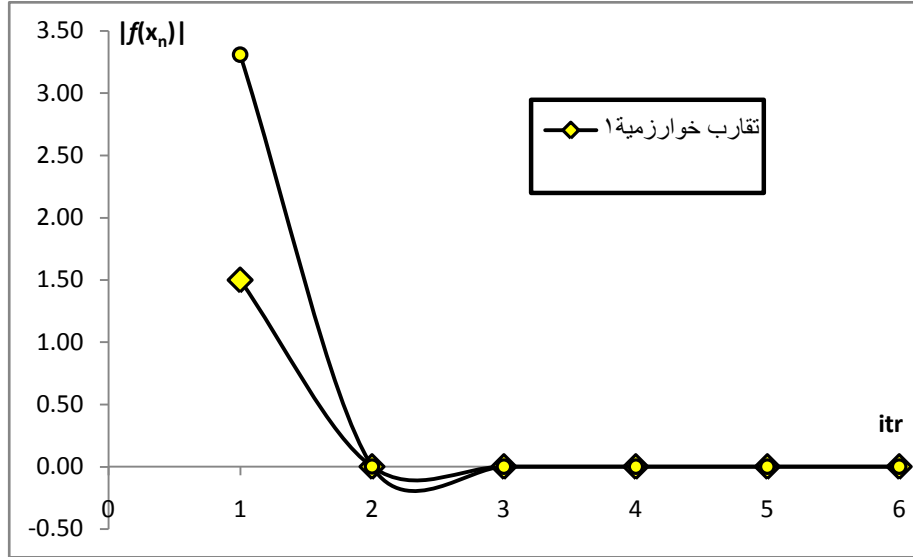
نستخدم الخوارزمية 1 والخوارزمية 2 المقترحتين لإيجاد جذر حقيقي مضاعف أربع مرات للمثال 4 من أجل $x_0 = -2.5$ ، و تمت مقارنة نتائج تلك الخوارزميتين مع نتائج ثلاث طرائق أخرى وسجلت النتائج في الجدول (7). ندرج في الجدول (8) نتائج الخوارزميتين المقترحتين لإيجاد جذر عقدي مضاعف من أجل $x_0 = 1 \pm I$ والمقارنة مع ثلاث طرائق أخرى [3]. بمقارنة نتائج الجدولين (7) و(8) تتضح أهمية نتائج الخوارزميتين المقترحتين. نبين في الشكل 9 سرعة تقارب الخوارزميتين المقترحتين في إيجاد الجذر العقدي المضاعف للمثال 4 باستخدام المعيار $|f(x_n)|$.

الجدول 7: إيجاد جذر حقيقي مضاعف أربع مرات للمثال 4 باستخدام الخوارزميتين المقترحتين والمقارنات مع طرائق أخرى.

الطريقة المستخدمة	الفرق بين تكرارين $ x_{n+1} - x_n $	قيمة الدالة $ f(x_n) $	الجذر التقريبي x_n	مرتبة التقارب	التكرار itr
الخوارزمية 1 المقترحة	2.08722 E-15	2.95473 E-59	-1.20765	2.00306	6
الخوارزمية 2 المقترحة	1.13382E-14	8.15637 E-55	-1.20765	1.99707	6
طريقة نيوتن المعدلة [3]	9.58875E-08	6.19 E-51	-1.20765	1.88403	10
طريقة تشيبتشيف أولر [3]	-----	7.23 E-90	-1.20765	2.08028	7
طريقة هالي [3]	1.07488 E-04	1.69 E-45	-1.20765	0.667094	5

الجدول 8: إيجاد جذر عقدي مضاعف للمثال 4 باستخدام الخوارزميتين المقترحتين والمقارنات مع طرائق أخرى.

الطريقة المستخدمة	الفرق بين تكرارين $ x_{n+1} - x_n $	قيمة الدالة $ f(x_n) $	الجذر التقريبي x_n	التكرار itr
الخوارزمية 1 المقترحة	1.37385E-14	7.16015E-57	$1.33997 \pm 0.758572 I$	9
الخوارزمية 2 المقترحة	4.12763E-13	7.27007E-53	$1.33997 \pm 0.758572 I$	10



الشكل(9): سرعة تقارب الخوارزميتين المقترحتين لإيجاد الجذر العقدي المضاعف للمثال 4 باستخدام المعيار $|f(x_n)|$.

الاستنتاجات والتوصيات

قدمنا خوارزميتي فعالتي لإيجاد الجذور الحقيقية والعقدية التقريبية للمعادلات غير الخطية سواء كانت هذه الجذور بسيطة أو مضاعفة عدد من المرات، حيث نجحت هاتان الخوارزميتان عند اختبارهما في إيجاد تلك الجذور لبعض الأمثلة المختلفة وتوقفت في الدقة وسرعة التقارب على بعض الطرائق الأخرى مثل طرائق نيوتن-رافسون، القواطع، تنصيف المجال [2]، طريقة هالي [10]، طريقة نيوتن المعدلة [11]، طريقة تشيبتشيف أولر [3]، الخوارزمية 2.2 [7]، الخوارزمية 2.6 [7] طريقة SM [5]، وتم توضيح دقة نتائجنا بالمقارنة مع الطرائق الأخرى في الجداول (1-8) وتبيان سرعة التقارب في الأشكال البيانية (1-9). لقد تميزت الخوارزميتان المقترحتان في إيجاد الجذور العقدية البسيطة والمضاعفة m مرة بدقة عالية في حين فشلت بعض الطرائق في إيجاد تلك الجذور.

نقترح استخدام الخوارزميتين المقترحتين لأنهما يستطيعان إيجاد الجذور للمعادلات غير الخطية أي كان شكل المعادلة المطروحة.

المراجع (References)

- [1] BIAZAR J. and B. Ghanbari, Some Higher-Order Families of Methods for Finding Simple Roots of Nonlinear Equations, *Gen. Math. Notes*, Vol. 7, No. 1, November (2011), pp. 25-32.
- [2] BURDEN, R. L. and J. D. FAIRES, Numerical Analysis, PWS-KENT, Boston Massachusetts, (1993), 559-587.
- [3] HEYDARI M., S.M. Hosseini and G.B. Loghmani, convergence of a family of third-order methods free from second derivatives for finding multiple roots of nonlinear equations, *World Applied Sciences Journal* 11(5) 507-512, (2010).
- [4] KAFASH B. AND M. M. HOSSEINI, A Predictor-Corrector Algorithm for Finding all Zeros of Nonlinear Equations, *Journal of Mathematical Extension* Vol. 8, No. 4, (2014), 39-54.
- [5] LIU B., Zhou X., A new family of fourth-order methods for multiple roots of nonlinear equations, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2013, Vol. 18, No. 2, 143-152.

- [6] NETA B., Scott M., Chun Ch., Basins of attraction for several methods to find simple roots of nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012) 10548–10556.
- [7] NOOR M. A. and F. A. Shah, A Family of Iterative Schemes for Finding Zeros of Nonlinear Equations having Unknown Multiplicity, *Applied Mathematics & Information Sciences* 8, No. 5, 2367-2373 (2014).
- [8] RAHIMIAN S. K., F. Jalali, J.D. Seader and R.E. White, A new homotopy for seeking all real roots of a nonlinear equation, *Computers and Chemical Engineering* 35 (2011) 403–411.
- [9] RUMP S. M. and Sh.I. Oishi, Verified Error Bounds for Double Roots of Nonlinear Equations, Institute for Reliable Computing, Hamburg University of Technology, Hamburg 21071, Germany,(2010).
- [10] THANDER A. K., G. Mandal, Improved Ujević method for finding zeros of linear and nonlinear equations, *International Journal of Mathematics Trends and Technology* Vol. 3, No. 2, (2012), 74-77.
- [11] TRAUB J. F., Iterative methods for solutions of equations, Printice Hall, New York (1964).
- [12] YUN B. I., A derivative free iterative method for finding multiple roots of nonlinear equations, *Applied Mathematics Letters* 22 (2009) 1859-1863.