

طريقتان جديدتان لحل جمل المعادلات غير الخطية

*الدكتور نضال إبراهيم حسن

□ ملخص □

نقدم في هذا العمل طريقتين عدديتين لإيجاد الحلول العددية لجمل المعادلات غير الخطية من الشكل $F(X) = 0$ ، حيث $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. إن الفكرة الأساسية تقوم على مبدأ وجود علاقة بين النهاية الدنيا لدالة وحل جملة المعادلات غير الخطية. الطريقة الأولى تبحث عن الحل العددي وفق متتالية من متجهات البحث المعرفة بدلالة متجه التدرج ومصفوفة هيسيان للدالة F ، بينما الطريقة الثانية تعتمد على إنشاء متتالية من متجهات البحث المترافقة. تم إثبات تقارب الطريقتين المقترحتين، وأنهما يقدمان حلولاً دقيقة إذا كانت الدالة تربيعية، وستكون الحلول تقريبية لأجل الدوال فوق التربيعية. تم تنفيذ خوارزميتي الطريقتين المقترحتين باستخدام برنامج *Mathematica* النسخة التاسعة.

أُخْتَبِرَتْ فعالية الطريقتين المقترحتين بتطبيقهما لإيجاد الحلول التقريبية لبعض المسائل، وتشير النتائج العددية إلى فعالية ودقة الطريقتين بالمقارنة مع بعض الطرائق الأخرى.

الكلمات المفتاحية: التدرج، مصفوفة هيسيان، النهاية الدنيا، جمل معادلات غير خطية، متجهات مترافقة.

Two New Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations

Dr. Nidal E. Hassan*

□ ABSTRACT □

In this paper, we present two new methods for finding the numerical solutions of systems of the nonlinear equations $F(X)=0$, where $F:\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$. The basic idea depend on founding relationship between minimum of a function and the solution of systems of the nonlinear equations. The first method seeks the numerical solution with a sequence of search directions, which is depended on gradient and Hessian matrix of function, while the second method is based on a sequence of conjugate search directions. The study shows that our two methods are convergent, and they can find exact solutions for quadratic functions, so they can find high accurate solutions for over quadratic functions. The purposed two algorithms are programmed by *Mathematica* Version9. The approximate solutions of some test problems are given. Comparisons of our results with other methods illustrate the efficiency and highly accurate of our suggested methods.

Key Words: *Gradient, Hessian Matrix, Minimization, Nonlinear systems. Conjugate Directions*

* Assistant Prof, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Al-Baath Universty, Homes, Syria.

1-مقدمة:

إن إيجاد الحلول لجمل المعادلات غير الخطية تعد مسألة لا تتحصر أهميتها عند المختصين في مجال الرياضيات فقط، بل نجد هذه الأهمية في فروع علمية مختلفة، فكثير من الباحثين في مجالات الهندسة والفيزياء والإحصاء الخ، تؤول مسائلهم في إحدى مراحلها إلى نماذج رياضية لجمل من المعادلات غير الخطية، وتقضي الحاجة عندئذ إلى إيجاد حلول لها، ولكن المشكلة التي تواجه هؤلاء المهتمين، هي أن الحلول الدقيقة لمعظم هذه النماذج من المعادلات لا يمكن إيجادها بالطرائق المعروفة، لهذا يلجأ الباحثون في مجال التحليل العددي لحل هذه المشكلة وذلك بتقديم طرائق عددية مبرمجة حاسوبياً لإيجاد الحلول التقريبية لمثل هذه النماذج.

يهدف هذا البحث لتقديم طريقتين عدديتين فعاليتين، تتسمان بالدقة وسرعة التقارب،

لإيجاد الحلول العددية لجمل المعادلات غير الخطية من الشكل:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

والتي نكتب بالشكل المختصر كالاتي:

$$F(X) = \mathbf{0} \quad (2)$$

حيث $F: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ ، و $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ متجه بـ n متغير حقيقي، و

$F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ متجه بـ n بعد، عناصره مجموعة من الدوال المستمرة.

إن جملة المعادلات (1) أو الجملة المكافئة (2) تملك حلاً دقيقاً عند X^* إذا كانت الدالة

المعرفة بالشكل:

$$G(X) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 \quad (3)$$

تملك قيمة نهاية دنيا صفرية عند X^* ، راجع [1,3,11].

بكلمات أخرى، إن إيجاد حل المسألة المطروحة (1) يؤول إلى إيجاد حل المسألة:

$$\text{Min}_{X \in \mathcal{R}^n} G(X), \quad (4)$$

حيث: $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق مرتين على الأقل. إذ إنه إذا كان X^* نهاية دنيا للمسألة (4)، فإن $F(X^*)=0$ ، و يكون X^* هو الحل المطلوب. قدم العلماء الأوائل مجموعة من الطرائق العددية الأساسية مثل طريقة تنصيف المجال، طريقة القواطع، طريقة نيوتن، طريقة هالي [2, 12]، استخدمت هذه الطرائق لإيجاد الحلول التقريبية للمعادلات غير الخطية بمتغير واحد، ثم عُممت طريقة نيوتن لحل جمل معادلات غير خطية. قُدمت مؤخرًا في السنوات القليلة الماضية العديد من الدراسات والأبحاث، تهدف إلى تطوير طرائق عددية لحل المسألة المطروحة (1)، فعلى سبيل المثال:

اقترح Amaya وآخرون في [1] تقنية عددية تعتمد على خوارزمية الأمثليات الاستكشافية لإيجاد الجذور الحقيقية للمسألة (1). طور Ardelean في [2] طريقة نيوتن بإدخال تعديل يعتمد على تنصيف زاوية المستقيم المماس لمنحني الدالة مع المحور Ox، ثم درس تقارب الطريقة الجديدة وأختبرها بحل بعض المسائل من النمط (1).

قُدم في الأعمال [1, 3, 11] طرائق عددية تعتمد على خوارزميات البحث الخطي لحل مسألة الأمثليات، استخدمت هذه التقنيات لحل المسألة (1). درس Hao وآخرون في [4] طريقة عددية تستخدم خوارزمية Macaulay وخوارزمية الفضاءات الجزئية المغلقة لحل المسألة (1). أوجد Jones and Iyengar في [5] طريقة تقريبية لعزل الجذور الحقيقية للمسألة (1)، وهي تقنية تكرارية تعتبر الدوال $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ متغيرات عشوائية، ويتم حساب المتوسط والانحراف المعياري والتشتت، واستخدمت طريقة مونت كارلو لحصر الجذور. درس Margaritis and Goulianas في [6] طريقة الشبكات العصبونية ذات التغذية الأمامية الخلفية لحل جملة معادلتين من الشكل (1). أنشأ Rahimian وآخرون في [7] طريقة مركبة من طريقتي Homotopy والنقطة الثابتة لحل المسألة (1). أختبر Ramadas وآخرون في [8] خوارزمية بحث نيلدر- ميد لحل المسألة (1). أوجد Savageau في [9] طريقة تحويل جملة المعادلات غير الخطية (1) إلى مجاميع متعددة من الفروق التفاضلية ودوال قوى وحساب قيم تقريبية للمتغيرات. أوجد Silva وآخرون في [10] طريقة تستخدم خوارزمية الوراثة العشوائية لحل جملة معادلات غير خطية ذات قيود.

قبل البدء بشرح مبدأ عمل الطريقتين المقترحتين، نقدم بعض التعاريف والمبادئ الأساسية الآتية:

تعريف 1 (الحل)

يُقال إن المتجه X هو حل (جذر) لجملة المعادلات (1) إذا كان $F(X)=0$.

تعريف 2 (التقارب)

لتكن $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية لانتهائية من المتجهات الحقيقية، يُقال إن المتتالية تتقارب إلى المتجه X (يدعى نهايتها) إذا كان لأجل أي عدد صغير موجب eps يوجد عدد صحيح موجب $N(eps)$ بحيث يتحقق:

$$\|X_k - X\| < eps, \quad \forall k > N(eps)$$

وعندئذ نكتب $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X$ للدلالة إلى أن المتتالية $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ تتقارب إلى X .

تعريف (3) (التقارب من المرتبة α)

بفرض أن $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية تتقارب إلى R ، وأن $E_k = X_k - R$ من أجل كل $k \geq 1$ ، إذا وجد عدنان موجبان α, λ بحيث يتحقق:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|X_{k+1} - R\|}{\|X_k - R\|^\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|E_{k+1}\|}{\|E_k\|^\alpha} = \lambda$$

عندئذ يُقال إن المتتالية تتقارب إلى R من المرتبة α بثابت خطأ تقارب λ .

تعريف (4) (متجه التدرج) Gradient Vector

إذا كانت الدالة $G: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ قابلة للاشتقاق بالنسبة لمتغيراتها، يُعرّف تدرج الدالة $G(X)$ الذي يُرمز له بـ $\nabla G(X)$ بأنه المتجه [14]:

$$\nabla G(X) = g(X) = \left[\frac{\partial G}{\partial x_1}, \frac{\partial G}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n} \right]^T$$

حيث $g_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}$ ، $i=1, \dots, n$ ، هي مشتقات جزئية للدالة $G(X)$ ، وللاختصار نستخدم

$g(X)$ بدلا من $\nabla G(X)$.

تعريف (5) (مصفوفة هيسيان) Hessian Matrix [14]

إذا كانت الدالة $G: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ قابلة للاشتقاق مرتين متتاليتين بالنسبة لمتغيراتها، تُعرّف مصفوفة هيسيان $H(X)$ التي يُرمز لها بـ $H(X)$ كالآتي:

$$H(X) = \nabla^2 G(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 G}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

تعريف (6) : الدالة التربيعية: (Quadratic Function)

يُقال إن الدالة $G(X)$ تربيعية في X إذا كانت مصفوفة هيسيان $H(X)$ لهذه الدالة ثابتة، ويمكن كتابتها كالاتي:

$$G(X) = \frac{1}{2} X^T H X + C^T X + d \quad (5)$$

حيث H مصفوفة ثابتة و C متجه ثابت و d عدد ثابت.

تعريف (7) (المصفوفة محددة موجبة) [14]:

بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$ ، و δ متجه غير صفري من البعد n ،

يُقال إن المصفوفة A محددة موجبة إذا تحققت المتراجحة:

$$\delta^T A \delta > 0, \quad \forall \delta \neq 0$$

تعريف (8) : النهاية الدنيا الموضعية (Local Minimum)

يُقال إن النقطة $X^* \in \mathcal{R}^n$ نهاية دنيا موضعية للدالة $G(X)$ إذا كانت G معرفة في

جوار X^* ، ويوجد عدد صغير موجب $\varepsilon > 0$ بحيث يكون:

$$G(X^*) \leq G(X),$$

وذلك من أجل جميع النقاط X التي تحقق $\|X^* - X\| < \varepsilon$ ، حيث $X \neq X^*$.

تعريف (9) : ترافق متجهين بالنسبة لمصفوفة [13]

يُقال عن متجهين $X, Y \in \mathcal{R}^n$ غير صفريين إنهما مترافقان بالنسبة للمصفوفة

المحددة الموجبة A من المرتبة $n \times n$ إذا كان $X^T A Y = 0$.

تعريف (10) : الحل العددي (The Numerical Solution)

إن الحل العددي هو تقريب للحل الدقيق، حيث تفترض معظم الطرائق العددية حلاً ابتدائياً X_0 ثم تعمل وفق تقنية تكرارية لإيجاد X_1 ، ثم X_2 ، ...، وهكذا تتشكل متتالية $\{X_k\}$ متقاربة إلى الحل الدقيق X^* ، وعندئذ يكون:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X^*$$

ولكن في الخوارزميات العددية سنكتفي بالحل العددي X_N الذي يحقق دقة مفروضة، حيث N هو رقم آخر تكرار، ولا بد للخوارزمية أن تقف عند التكرار N الذي يحقق إحدى المعيارين $\|X_N - X_{N-1}\| < \varepsilon$ أو $\|G(X_N)\| < \varepsilon$ ، حيث $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي صغير بقدر كافٍ.

مبرهنة [14]: الشروط الكافية لتكون X^* نهاية دنيا موضعية للدالة $G(X)$ هو أن يكون $\nabla G(X^*) = 0$ وتكون مصفوفة هيسيان $H(X^*)$ لهذه الدالة محددة موجبة.

2- أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث بأنه يتطرق إلى إيجاد الحلول التقريبية لجمل المعادلات غير الخطية أياً كان شكل الدالة غير الخطية F ، ونسعى لتقديم طريقتين عدديتين تتميزان بفعالية الأداء سرعة التقارب، كما ويتجلى هدفنا بشكل أساس في دعم وتطوير البحث العلمي في القسم، وتزويد الباحثين وطلاب الدراسات العليا بمعلومات إضافية من الناحيتين النظرية والتطبيقية.

3- طرائق البحث ومواده:

تعتمد طرائق البحث على إمكانية تحويل المسألة (1) إلى مسألة إيجاد نهاية دنيا تقريبية لدالة بعدة متغيرات، وتكون نقطة النهاية الدنيا التقريبية للمسألة الجديدة هي الحل التقريبي للمسألة المطروحة، ولهذا سيتم الاعتماد على تقنيات حل مسألة الأمثليات العددية بالبحث عن النهاية الدنيا الموضعية، وهي طرائق تعتمد على متجه التدرج ومفهوم الترافق ومصفوفة هيسيان لدالة المسألة الجديدة (3)، كما سيتم توصيف الطرائق بخوارزميات ليسهل تنفيذها حاسوبياً بإحدى لغات البرمجة المتطورة .

4- النتائج والمناقشة:

نقدم في هذه الفقرة صياغة تحليلية لطريقتين عدديتين تكراريتين وتوصيفهما خوارزميا وتنفيذهما باستخدام برنامج *Mathematica* في نسخته التاسعة.

الطريقة المقترحة الأولى:

نركز اهتمامنا أولاً على إيجاد نقطة النهاية الدنيا الموضوعية للدالة $G(X)$ المعرفة بالعلاقة (3)، لأجل هذا نفرض أن الدالة تقبل الاشتقاق مرتين متتاليتين بالنسبة لـ X ، وينشرها حول X_k وفق تايلور، والاكتفاء بالحدود الثلاثة الأولى، يمكن أن نكتب تقريبا :

$$G(X) = G_k + (g_k)^T (X - X_k) + \frac{1}{2} (X - X_k)^T H_k (X - X_k) \quad (6)$$

حيث $g_k = G'(X_k) = \nabla G(X_k)$ متجه التدرج، و $H_k = G''(X_k) = \nabla^2 G(X_k)$ مصفوفة هيسيان للدالة عند $X = X_k$. وبحساب تدرج الدالة (6)، نحصل على:

$$\nabla G(X) = g_k + H_k (X - X_k)$$

تكون X^* نهاية دنيا موضوعية لـ $G(X)$ بحسب المبرهنة (1) إذا كان $\nabla G(X^*) = 0$ وكانت مصفوفة هيسيان H_k محددة موجبة، يعني أن:

$$g_k + H_k (X^* - X_k) = 0 \quad (7)$$

ولكن بوضع $X_{k+1} = X^*$ لأن العلاقة (6) تقريبية، وافترض أن $X_{k+1} - X_k = d_k$ ، تنتج العلاقة التكرارية:

$$X_{k+1} = X_k + d_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

يدعى d_k متجه بحث، وبحسب من العلاقة (7) بعد تعويض $X_{k+1} = X^*$ كالآتي:

$$d_k = -H_k^{-1} g_k \quad (8a)$$

وهذا المتجه موجود دائماً لأن مصفوفة هيسيان قابلة للقلب لكونها محددة موجبة بحسب المبرهنة (1).

إذا كانت $X_0 \in \mathcal{R}^n$ نقطة ابتدائية قريبة من النهاية الدنيا للدالة $G(X)$ ، فإن العلاقة التكرارية (8) تنتج حلاً تكرارياً من الشكل $X_1, X_2, \dots, X_N, \dots$ وتتوقف عند التكرار X_N الذي يحقق إحدى المعيارين $\|X_N - X_{N-1}\| < \varepsilon$ أو $\|F(X_N)\| < \varepsilon$ ، لأجل $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي صغير بقدر كافٍ.

يمكن تحسين تقارب العلاقة التكرارية (8) بكتابتها كعلاقة بحث خطي كالآتي:

$$X_{k+1} = X_k + \alpha_k d_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9)$$

حيث $\alpha_k > 0$ تدعى بأطوال الخطوات، وهي نهايات دنيا لمتتالية الدوال التابعة لـ α الآتية:

$$\Phi_k(\alpha) = G(X_k + \alpha d_k), \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (10)$$

ويتم تعيين الخطوات α_k تقريبا باشتقاق الدالة $\Phi_k(\alpha)$ بالنسبة لـ α :

$$\Phi'_k(\alpha) = (d_k)^T g(X_k + \alpha d_k) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (11)$$

$$\alpha_k^i = \alpha_k^{i-1} - \frac{\Phi'_k(\alpha_k^{i-1})}{\Phi''_k(\alpha_k^{i-1})}, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad \text{واستخدام طريقة نيوتن رافسون:}$$

للحصول على الحل التقريبي α_k^m للمعادلة (11)، ويكون $\alpha_k = \alpha_k^m$, $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ تقريبا.

نتيجة (1): إذا كانت $G(X)$ دالة تربيعية ومصفوفة هيسيان لها محددة موجبة، فإن العلاقة التكرارية (9) تعطي حلا دقيقا عند التكرار الأول X_1 للمسألة $F(X) = 0$ من أجل كل $X_0 \in \mathcal{R}^n$.

الإثبات: إذا كانت $G(X)$ دالة تربيعية، فيمكن كتابتها بالشكل:

$$G(X) = G_0 + (g_0)^T (X - X_0) + \frac{1}{2} (X - X_0)^T H_0 (X - X_0)$$

وبإيجاد متجه التدرج للدالة $G(X)$ ، نحصل على $\nabla G(X) = g_0 + H_0 (X - X_0)$ وتعطى قيمة هذا المتجه عند $X = X_1$ كالاتي:

$$\begin{aligned} \nabla G(X_1) &= g_0 + H_0 (X_1 - X_0) = g_0 + H_0 d_1 = \\ &g_0 + H_0 (-H_0^{-1} g_0) = g_0 - (H_0 H_0^{-1}) g_0 = 0 \end{aligned}$$

وبما أن $\nabla G(X_1) = 0$ ومصفوفة هيسيان محددة موجبة فإن $X_1 = X^*$ بحسب المبرهنة (1)، وهذا يقتضي أن يكون $F(X_1) = 0$ وهو المطلوب.

نتيجة (2): إذا كانت مصفوفة هيسيان للدالة $G(X)$ محددة موجبة عند كل تكرار X_k فإن علاقة البحث التكرارية (9) تتقارب إلى الحل الدقيق للمسألة $F(X) = 0$ من أجل كل $X_0 \in \mathcal{R}^n$.

الإثبات: إن الشرط الكافي لتقارب العلاقة التكرارية (9) هو أن يتحقق شرط الانحدار الأشد الآتي [14]:

$$g_k^T d_k < 0, k = 0, 1, \dots$$

وبتعويض قيمة متجه البحث $d_k = -H_k^{-1} g_k$ في الشرط:

$$g_k^T d_k = g_k^T (-H_k^{-1} g_k) = -g_k^T H_k^{-1} g_k < 0$$

يتحقق مباشرة لأن مصفوفة هيسيان H_k محددة موجبة بالفرض، و مقلوبها H_k^{-1} أيضا مصفوفة محددة موجبة [13]، وبحسب التعريف (7) يكون $g_k^T H_k^{-1} g_k > 0, \forall g_k \neq 0$ وهو المطلوب.

سنوصف الآن الطريقة المقترحة الأولى بخوارزمية لتصبح سهلة القراءة وقابلة للتطبيق على الحاسب.

خوارزمية 1: هي توصيف للطريقة المقترحة الأولى، و يمكن تلخيصها بالنقاط الآتية:

شروط البدء: لتكن $X_0 \in \mathcal{R}^n$ نقطة ابتدائية قريبة من الحل الدقيق للمعادلة $F(X) = 0$ ،

$\varepsilon > 0$ صغير بحسب الحاجة، $k=0$ عداد التكرارات، نعرف الدالتين $F(X)$ ، و $G(X)$.

الخطوة 1: نحسب متجه التدرج g_k ومصفوفة هيسيان H_k للدالة $G(X)$ عند $X = d_k$.

الخطوة 2: نعرف متجه البحث بالعلاقة: $d_k = -H_k^{-1} g_k$.

الخطوة 3: نجد نقطة نهاية دنيا للدالة $\Phi_k(\alpha) = G(X_k + \alpha d_k)$

الخطوة 4: نحسب تكرار جديد من العلاقة $X_{k+1} = X_k + \alpha_k d_k$.

الخطوة 5: نزيد العداد واحد $k:=k+1$.

الخطوة 6: نختبر المعيار $\|F(X_k)\| < \varepsilon$ ، إذا لم يكن محققا نعود للتكرار بدءا من

الخطوة 2.

الخطوة 7: طباعة النتائج X_N حلا تقريبا للمعادلة $F(X) = 0$.

الطريقة المقترحة الثانية:

إن مبدأ عمل هذه الطريقة يعتمد على مفهوم ترافق المتجهات. يكون المتجهان غير

الصفريين $X, Y \in \mathcal{R}^n$ مترافقين بحسب التعريف (9) إذا كانا متعامدين وفق الجداء

الداخلي المعروف بالشكل:

$$(X, Y)_H = X^T H Y$$

والمرتبط بالنظيم:

$$\| X \|_H^2 = (X, X)_H = X^T H X$$

بفرض أن d_0, d_1, \dots, d_{n-1} متجهات مترافقة بالنسبة لمصفوفة H محددة موجبة، عندئذ فإن هذه المتجهات تشكل قاعدة للفضاء \mathfrak{R}^n ، وإذا كان $X \in \mathfrak{R}^n$ ، فإن X يكتب كتركيب خطي من الشكل:

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^T H d_i}{(d_i)^T H d_i} d_i \quad (12a)$$

ولإثبات صحة العلاقة (12a) نلاحظ أنه إذا كان $X \in \mathfrak{R}^n$ ، فإنه يكتب بدلالة القاعدة d_0, d_1, \dots, d_{n-1} كالآتي:

$$X = \lambda_0 d_0 + \lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_{n-1} d_{n-1} \quad (12b)$$

من جهة أخرى، وبسبب ترافق هذه المتجهات نجد أن:

$$X^T H d_i = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (d_k)^T \right] H d_i = \lambda_i (d_i)^T H d_i$$

ومنه نحصل على $\lambda_i = \frac{X^T H d_i}{(d_i)^T H d_i}$ وبالتعويض في (12b) ينتج المطلوب.

الآن، من أجل نقطة ابتدائية معطاة $X_0 \in \mathfrak{R}^n$ ، يمكن تعريف المتتالية المنتهية الآتية:

$$X_{i+1} = X_i + \alpha_i d_i, \quad (i=0,1,\dots,n-1) \quad (13)$$

حيث $d_i, (i=0,1,\dots,n-1)$ متجهات مترافقة مع H عددها n ، و α_i تدعى أطول الخطوات، وهي نهايات دنيا لمتتالية الدوال التابعة لـ α الآتية:

$$\Phi_i(\alpha) = G(X_i + \alpha d_i), \quad (i=0,1,\dots,n-1) \quad (14)$$

يمكن تعيين α_i بأسلوب مماثل لإيجاد جذور المعادلة (11).

مبرهنة 1: إذا كانت $G(X)$ دالة تربيعية ومصفوفة هيسيان H لها محددة موجبة فإن المتجه X_n الناتج عن التكرار n في العلاقة (13) هو الحل الدقيق للمعادلة $F(X) = 0$.

البرهان: سنثبت أن العلاقة التكرارية (13) ستعطي الحل الدقيق للمسألة (1) بعد n تكرار، يعني سنثبت أن $X_n = X^*$ ، من أجل تحقيق ذلك نكتب العلاقة (13) بالشكل:

$$X_{k+1} = X_0 + \sum_{i=0}^k \alpha_i d_i, \quad (k=0,1,\dots,n-1) \quad (15)$$

بحساب متجه التدرج للدالة التربيعية المعرفة في (5) عند $X = X_{k+1}$ ينتج لدينا:

$$g_{k+1} = g(X_{k+1}) = C + H X_{k+1} \rightarrow$$

$$g_0 = C + H X_0, \quad g(X^*) = C + H X^* = 0$$

و باستخدام العلاقتين (11) و(15) وشروط الترافق، نحصل على:

$$0 = (d_k)^T g_{k+1} = (d_k)^T (C + H X_{k+1}) = (d_k)^T (C + H X_0 + \sum_{i=0}^k \alpha_i H d_i)$$

$$= (d_k)^T g_0 + \sum_{i=0}^k \alpha_i (d_k)^T H d_i = (d_k)^T g_0 + \alpha_k (d_k)^T H d_k \quad (16)$$

ومن العلاقة (16) يكون لدينا:

$$\alpha_k = -\frac{(g_0)^T d_k}{(d_k)^T H d_k} = -\frac{(d_k)^T g_0}{(d_k)^T H d_k} \quad (17)$$

حيث $(d_k)^T H d_k > 0$ لأن H مصفوفة محددة موجبة بالفرض.

بتعويض العلاقة (17) في العلاقة (15) وجعل $k=n-1$ ، نحصل على العلاقة التكرارية:

$$X_n = X_0 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(g_0)^T d_i}{(d_i)^T H d_i} d_i \quad (18)$$

وبمطابقة العلاقة (18) مع العلاقة (12a)، ينتج لدينا:

$$X_n = X_0 - H^{-1} g_0 = X_0 - H^{-1} (C + H X_0) = -H^{-1} C = -H^{-1} (-H X^*) = X^*$$

نجد أن X_n نقطة نهاية دنيا دقيقة للدالة $G(X)$ ، ومنه X_n حل دقيق لـ $F(X) = 0$ وهو المطلوب.

خوارزمية 2:

هي توصيف للطريقة المقترحة الثانية، و يمكن تلخيصها بالنقاط الآتية:

شروط البدء: لتكن $X_0 \in \mathcal{R}^n$ نقطة ابتدائية قريبة من الحل الدقيق للمعادلة $F(X) = 0$ ،

$\varepsilon > 0$ صغير بحسب الحاجة، $i=0$ عدّاد التكرارات، نعرف الدالتين $F(X)$ ، و $G(X)$.

الخطوة 1: نضع قاعدة الأشعة الابتدائية وهي أشعة الواحدة:

$$, d_0 = e_1, \dots, d_{n-1} = e_n, d_1 = e_2$$

الخطوة 2: ننفذ العمليتين التاليتين من أجل $k=0,1,\dots,n-1$

أ- نجد نقطة نهاية دنيا للدالة $\Phi_k(\alpha) = G(X_k + \alpha d_k)$

ب- نحسب $X_{k+1} = X_k + \alpha_k d_k$

الخطوة 3: نحسب متجه مترافق جديد $d_n = -H_n^{-1} g(X_n)$

الخطوة 4: نجد نقطة نهاية دنيا للدالة $\Phi_n(\alpha) = f(X_n + \alpha d_n)$

الخطوة 5: نحسب نقطة التكرار الجديدة $X_{n+1} = X_n + \alpha_n d_n$ ، ونضع $i:=i+1$.

الخطوة 6: نختبر الشرط $\|F(X_{n+1})\| < \varepsilon$ ، فإذا كان محقق نتوقف عن التكرار وننتقل

للخطوة 7، وإلا نحدّث متجهات البحث كالاتي:

أ- نضع $d_0 = d_1, d_1 = d_2, \dots, d_n = -H_{n+1}^{-1} g(X_{n+1})$

ب- نضع $X_0 = X_{n+1}$ ونعود للتكرار بدءا من الخطوة 2.

الخطوة 7: طباعة النتائج X_{n+1} حلا تقريبا لجملة المعادلات $F(X) = 0$.

نستخلص مما سبق النتيجة التالية.

نتيجة (2): إذا كانت $G(X)$ دالة تربيعية من الشكل المعطى بالعلاقة (5)، ومصفوفة

هيسيان لها محددة موجبة، وكانت d_0, d_1, \dots, d_{n-1} متجهات مترافقة بالنسبة لمصفوفة

هيسيان H ، عندئذ من أجل كل نقطة $X_0 \in \mathbb{R}^n$ فإن

$$X_n = X_0 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(g_0)^T d_i}{(d_i)^T H d_i} d_i \quad (19)$$

هي نقطة نهاية دنيا لـ $G(X)$ ، وحل دقيق لـ $F(X) = 0$ باستخدام جميع متجهات

البحث.

فرضية: لنكن $G(X)$ دالة تربيعية معرفة بالعلاقة (5) ومصفوفة هيسيان لها محددة

موجبة، نعرف من أجل $X^{(0)}, X^{(1)}, d \in \mathbb{R}^n$ ، دالتين بمتغير وحيد كما يلي:

$$\psi_k(\alpha) = G(X^{(k)} + \alpha d), \quad k = 0, 1$$

نرمز لنقطتي النهاية الدنيا لهاتين الدالتين بـ α_0, α_1 على الترتيب، وليكن:

$$U_k = X^{(k)} + \alpha_k d, \quad k = 0, 1$$

$$W = U_1 - U_0$$

عندئذ فإن المتجهتين W, d يكونا مترافقتين بالنسبة للمصفوفة H_n .

البرهان: بما أن α_k نهاية دنيا للدالة $\psi_k(\alpha)$ ، باشتقاق $\psi_k(\alpha)$ بالنسبة لـ α نجد أن:

$$\psi'_k(\alpha_k) = d^T g(U_k) = 0, \quad k = 0, 1$$

وهكذا يكون لدينا:

$$\begin{aligned} d^T H_n W &= d^T H_n (U_1 - U_0) = d^T (H_n U_1 - H_n U_0) \\ &= d^T (H_n U_1 + C - H_n U_0 - C) = d^T [g(U_1) - g(U_0)] = 0 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

مبرهنة 2: إذا كانت $G(X)$ دالة تربيعية معرفة بالعلاقة (5) ومصفوفة هيسيان لها محددة موجبة فإن الخوارزمية (2) لطريقة الثانية تولد متجهات بحث مترافقة بالنسبة للمصفوفة H_n في كل تكرار.

البرهان: تستخدم الخوارزمية 2 في التكرار الأول أشعة الواحدة كمتجهات بحث وتولد متجه بحث جديد d_n بالتالي:

$$(d_i)^T H_n d_j = (e_{i+1})^T H_n e_{j+1} = 0$$

إن المتجهات d_0, d_1, \dots, d_{n-1} مترافقة تبادليا بالنسبة للمصفوفة H_n مها تكن $i \neq j$ ، حيث i و j تأخذ القيم من 0 وحتى $n-1$. و بفرض أن الخوارزمية 2 أنتجت في التكرارين الأول والثاني المتجهين الجديدين d_n, d_{n+1} ، عندئذ نجد:

$$(d_n)^T H_n d_{n+1} = -(d_n)^T H_n (H_n^{-1} g_{n+1}) = -(d_n)^T g_{n+1} = 0$$

والسبب في ذلك يرجع إلى كون α_n المحسوب في الخطوة 4 من الخوارزمية 2 ليس إلا جذر للمعادلة $\Phi'_n(\alpha) = 0$ مما يؤدي إلى أن:

$$0 = \Phi'_n(\alpha_n) = f'(X_n + \alpha_n d_n) = (d_n)^T g_{n+1}$$

حاليا، نفرض في مرحلة ما من التكرارات أن الخوارزمية (2) أنتجت جملة متجهات البحث الآتية:

$$d_k, d_{k+1}, \dots, d_n \quad (20)$$

نفرض أن جملة المتجهات (20) مترافقة مع المصفوفة H_n ، ولنثبت أن الجملة التالية مترافقة:

$$d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_{n+1} \quad (21)$$

لإثبات ترافق الجملة (21) مع H_n يكفي فقط إثبات ترافق المتجهتين d_n, d_{n+1} ، وهذا يكون محقق عند كل تكرارين متتالين للسبب السابق نفسه في التكرارين الأول والثاني، أي أن:

$$(d_n)^T H_n d_{n+1} = -(d_n)^T g_{n+1} = 0$$

وهو المطلوب.

نتيجة(4): إن الطريقة الثانية الموصوفة في الخوارزمية(2) تحقق الشرطين الآتيين:

-a شرط الانحدار الأشد [14]:

$$(g_k)^T d_k < 0, \quad \forall k > 0 \quad (22)$$

-b شروط Wolfe-Powell [14]:

$$G(X_k + \alpha_k d_k) - G_k \leq \delta \alpha_k (g_k)^T d_k \quad (23)$$

$$g(X_k + \alpha_k d_k)^T d_k \geq \sigma (g_k)^T d_k \quad (24)$$

حيث $\sigma \in (\delta, 1)$ ، $\delta \in (0, 1/2)$

البرهان: إن إثبات الشرط (22) وتحقيقه يتم بسهولة بملاحظة أن المصفوفة H_k^{-1} محددة موجبة وبالتالي:

$$(d_k)^T g_k = -(H_k^{-1} g_k)^T g_k = -(g_k)^T H_k^{-1} g_k < 0$$

ولإثبات (23): ننشر الدالة $G(X)$ وفق تايلور حول X_k ، حيث يمكن أن نكتب تقريباً:

$$G(X) = G_k + (g_k)^T (X - X_k) + \frac{1}{2} (X - X_k)^T H_k (X - X_k)$$

وبتعويض $X = X_{k+1}$ ، وملاحظة أن $X_{k+1} = X_k + \alpha_k d_k$ ، $d_k = -H_k^{-1} g_k$ نحصل على:

$$\begin{aligned} G(X_k + \alpha_k d_k) &= G_k + \alpha_k (g_k)^T d_k + \frac{1}{2} \alpha_k^2 (d_k)^T H_k d_k \\ &= G_k - \alpha_k (g_k)^T H_k^{-1} g_k + \frac{1}{2} \alpha_k^2 (H_k^{-1} g_k)^T H_k (H_k^{-1} g_k) \\ &= G_k - \alpha_k (g_k)^T H_k^{-1} g_k + \frac{1}{2} \alpha_k^2 (g_k)^T H_k^{-1} g_k \\ &= G_k + \left(\frac{1}{2} \alpha_k - 1\right) \alpha_k (g_k)^T H_k^{-1} g_k \end{aligned}$$

مما سبق نستطيع أن نكتب:

$$G(X_k + \alpha_k d_k) = G_k + \left(1 - \frac{1}{2} \alpha_k\right) \alpha_k (g_k)^T d_k \quad (25)$$

عندئذ يوجد $\alpha_k \in (0,1)$ ، و $\delta \in (0, 1/2)$ ، بحيث يكون $0 < \delta \leq (1 - \frac{1}{2}\alpha_k) < 1$

وبالتالي:

$$G(X_k + \alpha_k d_k) - G_k \leq \delta \alpha_k (g_k)^T d_k$$

وهو الشرط (23). ولإثبات الشرط (24) نشق العلاقة (25) بالنسبة لـ α_k نجد أن:

$$g(X_k + \alpha_k d_k)^T d_k = (1 - \alpha_k) (g_k)^T d_k$$

عندئذ يوجد $\alpha_k \in (0,1)$ ، و $\sigma \in (\delta, 1)$ ، بحيث يكون $0 < (1 - \alpha_k) \leq \sigma < 1$

وبالتالي:

$$g(X_k + \alpha_k d_k)^T d_k \geq \sigma (g_k)^T d_k$$

وهو ما يثبت الشرط (24)، وهو المطلوب.

ملاحظة 2: لإنجاز الجوانب التطبيقية من هذا العمل سنستخدم لغة *Mathematica* المتطورة وهي لغة برمجية عالية المستوى تسمح باستخدام تمثيلات عددية بدقة عالية، وتسمح أيضا بالتمثيلات التحليلية ومعالجتها، بالإضافة إلى امتلاكها بيئة رسومية متطورة يبعد واحد وبعدين وثلاثة أبعاد.

ننفذ الخوارزميتين (1) و (2) باستخدام هذه اللغة، بافتراض أن المطلوب إيجاد الحل العددي لجمل المعادلات غير الخطية:

$$\begin{cases} 4x^3 + 4x y + 2y^2 - 42x - 14 = 0 \\ 4y^3 + 4x y + 2x^2 - 26y - 22 = 0 \end{cases}$$

البرنامج 1: تنفيذ الخوارزمية 1 باستخدام لغة *Mathematica*:

```
Clear[x, y, f1, f2, g, S, x0, x1, gx, gy, ee, H]
f1[x_, y_] = 4 x^3 + 4 x y + 2 y^2 - 42 x - 14 ;
f2[x_, y_] = 4 y^3 + 4 x y + 2 x^2 - 26 y - 22 ;
g[x_, y_] = f1[x, y]^2 + f2[x, y]^2;
gx[x_, y_] = Simplify[D[g[x, y], x]];
gy[x_, y_] = Simplify[D[g[x, y], y]];
H11[x_, y_] = Simplify[D[gx[x, y], x]];
H12[x_, y_] = Simplify[D[gx[x, y], y]];
H21[x_, y_] = Simplify[D[gy[x, y], x]];
H22[x_, y_] = Simplify[D[gy[x, y], y]];
x0 = {4.0, 3.5};
For[i = 0, i <= 3,
  Print["g=", g[x0[[1]], x0[[2]]];
  g0 = {gx[x0[[1]], x0[[2]]], gy[x0[[1]], x0[[2]]];
```



```
H = {{H11[x0[[1]], x0[[2]]], H12[x0[[1]], x0[[2]]], {H21[x0[[1]], x0[[2]]],
H22[x0[[1]], x0[[2]]]]};
S = -Inverse[H].g0;
x1 = x0 + ee S;
ee = ee /. FindRoot[D[g[x1[[1]], x1[[2]]], ee] == 0, {ee, 0.0}];
x1 = x0 + ee S; x0 = x1;
ff = {f1[x0[[1]], x0[[2]]], f2[x0[[1]], x0[[2]]]};
Print["itr=", i, " X", i, "=", x0, " g", i, "=",
g[x0[[1]], x0[[2]]], " e=", ee];
Print["f(X", i, ")=", ff, " and Norm f(X", i, ")=", Norm[ff] ];
Clear[ee, S, x1], i++]
```

البرنامج 2: تنفيذ الخوارزمية 2 باستخدام لغة *Mathematica*

```
Clear[x, y, f1, f2, g, S, x0, x1, gx, gy, ee, H, d, k, g0]
f1[x_, y_] = 4 x^3 + 4 x y + 2y^2 - 42 x - 14 ;
f2[x_, y_] = 4 y^3 + 4 x y + 2 x^2 - 26 y - 22;
g[x_, y_] = f1[x, y]^2 + f2[x, y]^2;
gx[x_, y_] = Simplify[D[g[x, y], x]];
gy[x_, y_] = Simplify[D[g[x, y], y]];
H11[x_, y_] = Simplify[D[gx[x, y], x]];
H12[x_, y_] = Simplify[D[gx[x, y], y]];
H21[x_, y_] = Simplify[D[gy[x, y], x]];
H22[x_, y_] = Simplify[D[gy[x, y], y]];
x0 = {4.0, 1.5};
d[0] = {1, 0}; d[1] = {0, 1};
For[i = 0, i <= 2,
For[k = 0, k < 2, k++, x1 = x0 + ee d[k];
ee = ee /. FindRoot[D[g[x1[[1]], x1[[2]]], ee] == 0, {ee, 0.1}];
x1 = x0 + ee d[k]; x0 = x1; Clear[ee];
Print["g=", g[x0[[1]], x0[[2]]]];
g0 = {gx[x0[[1]], x0[[2]]], gy[x0[[1]], x0[[2]]]};
H = {{H11[x0[[1]], x0[[2]]], H12[x0[[1]], x0[[2]]], {H21[x0[[1]], x0[[2]]],
H22[x0[[1]], x0[[2]]]]};
S = -Inverse[H].g0;
x1 = x0 + ee S;
ee = ee /. FindRoot[D[g[x1[[1]], x1[[2]]], ee] == 0, {ee, 0.0}];
x1 = x0 + ee S; x0 = x1; d[0] = d[1]; d[1] = S;
ff = {f1[x0[[1]], x0[[2]]], f2[x0[[1]], x0[[2]]]};
Print["itr=", i, " X", i, "=", x0, " g", i, "=",
g[x0[[1]], x0[[2]]], " e=", ee];
Print["f(X", i, ")=", ff, " and Norm f(X", i, ")=", Norm[ff] ];
Clear[ee, S, x1], i++]
```

نتائج واختبارات عديدة

نختبر فعالية ودقة الخوارزميتين للطريقتين المقترحتين بتنفيذ البرنامج 1 و البرنامج 2
لحل بعض مسائل الاختبار من جمل المعادلات غير الخطية ومقارنة نتائجنا مع نتائج

طريقتان جديدتان لحل جمل المعادلات غير الخطية

بعض الطرائق الأخرى في مراجع مختلفة. كما سيتم قياس دقة وفعالية متتالية الحل التقريبي X_k لطريقة ما بمدى سرعة تقارب المعيار $\|F(X_k)\| = \sqrt{\sum_{i=0}^n f_i^2(X_k)}$ إلى الصفر. نستخدم المعيار $Rate = \log_2(E_{k-1}/E_k)$ لحساب معدل التقارب للطريقة بين كل تكرارين متتاليين، حيث E_k هو الخطأ في التكرار X_k .

المسألة 1: [3,9]: لتكن المسألة الأولى جملة معادلتين غير خطيتين التي تدعى باختبار Himmelblau:

$$\begin{cases} 4x_1^3 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 42x_1 - 14 = 0 \\ 4x_2^3 + 4x_1x_2 + 2x_1^2 - 26x_2 - 22 = 0 \end{cases}$$

نطبق الخوارزميتين المقترحتين لإيجاد سبعة حلول تقريبية للمسألة 1، وندرج نتائج الحل في الجدولين (1) و (2). ولتبيان فعالية الطريقتين المقترحتين نقارن نتائجنا مع نتائج طريقة البحث الخطي [3]، وطريقة سافاجو [9]، وندرج النتائج في الجدولين (3)-(4). وبمقارنة نتائج الجداول (1)-(4) تتضح دقة وأفضلية نتائجنا. نرسم في الشكل (1) سرعتي تقارب الخوارزميتين (1) و (2) في إيجاد الحل التقريبي الأول باستخدام المعيار $\|F(X_k)\|$.

لقد تم استخدام النقاط الابتدائية في الحلول السبعة على الترتيب: $(0, 0.5)$ ، $(0, -0.5)$ ، $(-1, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(1, -0.5)$ ، $(0, -2.5)$.

الجدول 1: إيجاد الحلول التقريبية للمسألة (1) باستخدام الطريقة المقترحة الأولى.

رقم الحل	الحل التقريبي X_k	$f_1(X_k)$	$f_2(X_k)$	رقم التكرار k	متوسط معدل التقارب Rate
الحل الأول	(-0.270845, -0.923039)	-8.27436 E-10	-1.61532 E-10	1	4.96185
الحل الثاني	(0.0866775, 2.88425)	1.62327 E-9	-1.88745 E-9	2	5.61462
الحل الثالث	(-3.07303, -0.081353)	-4.97846 E-12	4.97991 E-13	3	4.672413
الحل الرابع	(3.38515, 0.0738519)	3.10078 E-10	4.11997 E-11	4	5.58153
الحل الخامس	(3.000000000, 2.000000000)	1.16408 E-10	8.49489 E-11	5	5.75822
الحل السادس	(3.58443, -1.84813)	-3.12639 E-13	-5.43565 E-13	6	3.99228
الحل السابع	(-0.127961, -1.95371)	4.55636 E-13	-4.93827 E-13	7	2.29453

الجدول 2: إيجاد الحلول التقريبية للمسألة (1) باستخدام الطريقة المقترحة الثانية.

رقم الحل	الحل التقريبي X_k	$f_1(X_k)$	$f_2(X_k)$	رقم التكرار k	متوسط معدل التقارب Rate
الحل الأول	(-0.270845, -0.923039)	-1.33227 E-15	0	1	5.36455
الحل الثاني	(0.0866775, 2.88425)	3.55271 E-15	0	2	7.465662
الحل الثالث	(-3.07303, -0.081353)	-1.23235 E-14	4.16334 E-15	3	8.06053
الحل الرابع	(3.38515, 0.0738519)	3.9968 E-15	4.996 E-15	4	9.01394
الحل الخامس	(3.00000000, 2.00000000)	1.07775 E-10	1.82219 E-11	5	7.85742
الحل السادس	(3.58443, -1.84813)	1.58461 E-9	-2.89177 E-10	6	7.663333
الحل السابع	(-0.127961, -1.95371)	-7.76446 E-12	-2.00222 E-11	7	9.38723

الجدول 3: إيجاد الحلول التقريبية للمسألة (1) باستخدام طريقة البحث الخطي Line Search في

[3].

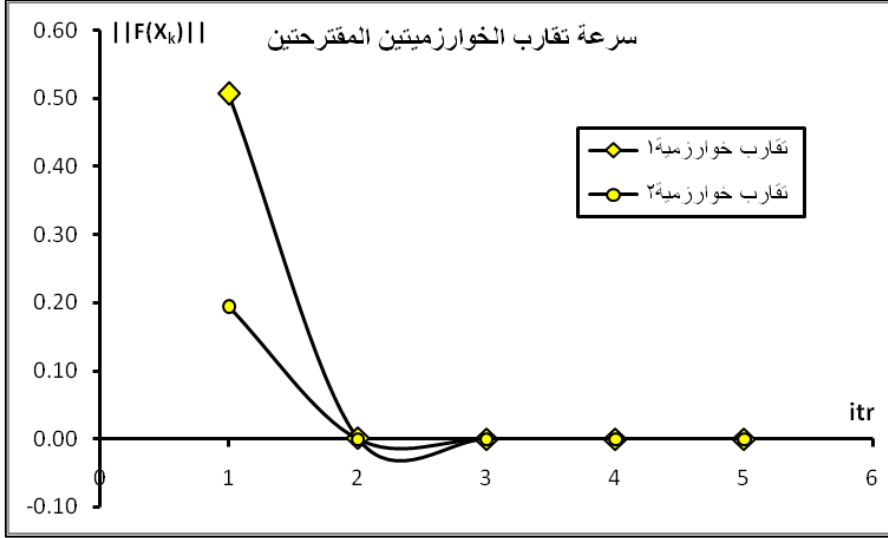
رقم الحل	الحل التقريبي في التكرار الخامس X_5	$f_1(X_5)$	$f_2(X_5)$	متوسط معدل التقارب Rate
الحل الأول	(-0.270841381989373, -0.923036977925469)	1.51325E-4	4.19365E-5	2.97
الحل الثاني	(0.0867085036783106, 2.88423339327931)	1.19474E-3	1.212087E-3	2.13
الحل الثالث	(-3.07304526798170, -0.0813371350117495)	1.58640E-3	3.61678E-4	2.11
الحل الرابع	(3.38519412590167, 0.0735892503227077)	-1.93149E-4	-3.80767E-3	1.65
الحل الخامس	(3.00003916764214, 1.99979209998351)	1.25948E-3	6.28423E-3	1.98
الحل السادس	(3.58441811907790, -1.84770519568769)	-1.85554E-3	-1.22804E-2	2.23
الحل السابع	(-0.127609787275348, -1.95313642658286)	2.22599E-2	-8.22744E-3	2.01

الجدول 4: إيجاد الحلول التقريبية للمسألة (1) باستخدام طريقة Savageau في المرجع [9].

رقم الحل	الحل التقريبي X_k	$f_1(X_k)$	$f_2(X_k)$	رقم التكرار k	متوسط معدل التقارب Rate
الحل الأول	(-0.2708, -0.923)	-4.31494 E-4	-1.09116 E-3	1	3.26
الحل الثاني	(0.08668, 2.884)	-1.55123 E-3	-9.43013 E-3	2	2.19
الحل الثالث	(-3.073, -0.08135)	8.94889 E-4	-2.2062 E-4	3	3.16
الحل الرابع	(3.385, 0.07385)	-7.39843 E-3	-1.05497 E-3	4	1.97

طريقتان جديدتان لحل جمل المعادلات غير الخطية

2.33	5	3.7002 E-3	8.40077 E-3	(3.000, 2.000)	الحل الخامس
2.68	6	3.67616 E-4	-2.19986 E-2	(3.584, -1.848)	الحل السادس
2.29	7	-2.58933 E-3	2.1457 E-3	(-0.1280, -1.954)	الحل السابع



الشكل(1): مخطط سرعتنا تقارب الخوارزميتين المقترحتين في إيجاد الحل التقريبي الأول للمسألة(1)

المسألة 2: [6]: لتكن جملة المعادلتين غير الخطيتين الآتية:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2 = 44 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 + x_1 + x_2 = -12 \end{cases}$$

نطبق الخوارزميتين المقترحتين لإيجاد الحلول التقريبية الأربعة للمسألة 2، وندرج النتائج في الجدولين (5) و(6). ولإثبات فعالية الطريقتين المقترحتين نقارن نتائجنا مع نتائج طريقة الشبكات العصبية في [6] ونسجل النتائج في الجدول (7). بمقارنة نتائج الجداول (5)-(7) نتضح دقة وأفضلية نتائجنا. نرسم في الشكل (2) سرعتي تقارب الخوارزميتين (1) و(2) باستخدام المعيار $\|F(X_k)\|$.

الجدول 5: إيجاد الحلول التقريبية للمسألة (2) باستخدام الطريقة المقترحة الأولى.

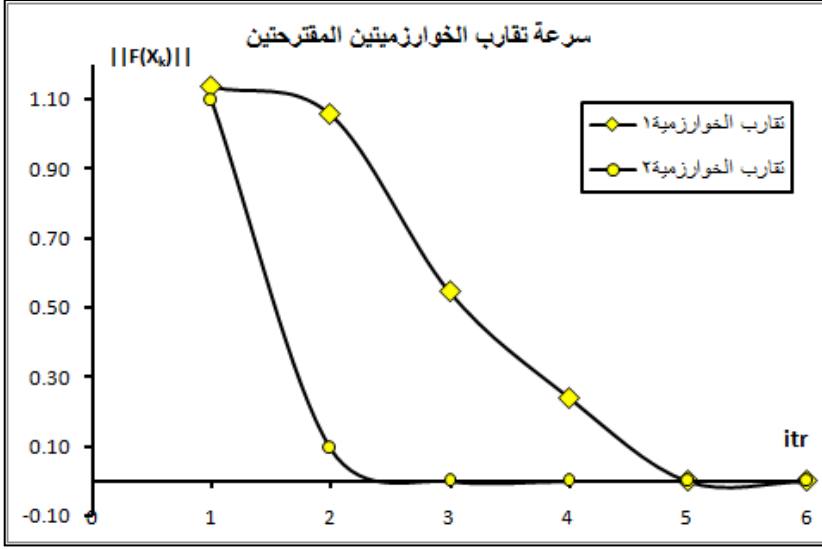
رقم الحل	الحل التقريبي X_k	$f_1(X_k)$	$f_2(X_k)$	عدد التكرارات itr	القيم الابتدائية X_0
الحل الأول	(4.4187, -7.94356)	6.6656E-10	3.0078E-10	1	(9.0, -9.0)
الحل الثاني	(-3.48896, 7.31612)	-1.13687E-13	2.80664E-13	2	(-9.0, 9.0)
الحل الثالث	(-4.92974, -3.37256)	5.30456E-11	3.48521E-12	3	(-9.0, -5.0)
الحل الرابع	(3, 4)	-1.04805E-11	3.03082E-11	4	(9.0, 5.0)

الجدول 6: إيجاد الحلول التقريبية للمسألة (2) باستخدام الطريقة المقترحة الثانية.

رقم الحل	الحل التقريبي X_k	$f_1(X_k)$	$f_2(X_k)$	عدد التكرارات itr	القيم الابتدائية X_0
الحل الأول	(4.4187, -7.94356)	6.03961E-13	-7.81597E-14	5	(9.0, -9.0)
الحل الثاني	(-3.48896, 7.31612)	7.10543E-15	1.42109E-14	6	(-9.0, 9.0)
الحل الثالث	(-4.92974, -3.37256)	-2.93492E-8	-4.92539E-8	7	(-9.0, -5.0)
الحل الرابع	(3, 4)	-1.56561E-10	-2.23221E-10	8	(9.0, 5.0)

الجدول 7: الحلول التقريبية للمسألة (2) باستخدام طريقة الشبكات العصبية ذات التغذية الخلفية في [6].

رقم الحل	الحل التقريبي X_k	$f_1(X_k)$	$f_2(X_k)$	عدد التكرارات itr	القيم الابتدائية X_0
الحل الأول	(4.41869883, -7.94356724)	0.00000137	0.00000014	1	(4.2, -8.0)
الحل الثاني	(-3.48896352, 7.31612832)	0.00000136	0.00000021	2	(-3.2, 7.4)
الحل الثالث	(-4.92973223, -3.37255936)	-0.00000137	-0.00000025	3	(-4.6, -3.6)
الحل الرابع	(3.00000441, 4.00000061)	0.00000127	0.00000059	4	(2.8, 4.4)



الشكل(2): مخطط سرعة تقارب الخوارزميتين المقترحتين في إيجاد الحل التقريبي الأول للمسألة(2).

المسألة 3: [12]: لنكن جملة المعادلات غير الخطية الآتية:

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - 1/2 = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0 \\ \text{Exp}(-x_1 x_2) + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0 \end{cases}, X_0 = (0.1, 0.1, -0.1)^T$$

نطبق الخوارزميتين المقترحتين للمسألة 2 بدءاً من النقطة X_0 ، وندرج نتائجنا في الجدول (8). نقارن نتائجنا مع نتائج أربع طرائق مختلفة: طريقة نيوتن Newton [12] - طريقة برويدن Broyden [12] - طريقة الانحدار الأشد Steepest Descent [12]، طريقة التدرج Gradient [12]، وندرج النتائج لهذه الطرائق في الجدولين (9)-(10). وبمقارنة نتائج الجداول (8)-(10) تتضح دقة وأفضلية نتائجنا. نرسم في الشكل (3) سرعتي تقارب خوارزميتنا، ونرسم في الشكل (4) سرعة تقارب طرائق: نيوتن، برويدن، الانحدار الأشد، التدرج باستخدام المعيار $\|F(X_k)\|$. الجدول 8: إيجاد الحل التقريبي للمسألة (3) باستخدام الطريقتين المقترحتين.

k	الخوارزمية المقترحة 2		الخوارزمية المقترحة 1	
	$\ F(X_k)\ $	الحل التقريبي X_k	$\ F(X_k)\ $	الحل التقريبي X_k
1	0.220843	(0.474481, 0.0106618, -0.523792)	0.929987	(0.504745, 0.04659, -0.515191)
2	2.00734E-4	(0.500062, 7.7744E-6, -0.5236)	0.0145598	(0.494766, 0.001317, -0.523791)
3	1.2784E-12	(0.5, 8.26559E-14, -0.523599)	2.3548E-4	(0.500053, 3.568E-5, -0.523539)
4	2.2204E-16	(0.5, 0, -0.5235987755982988)	1.4501E-8	(0.5, 7.154E-11, -0.523599)
5	----	-----	9.591E-13	(0.5, 4.08914E-18, -0.523599)

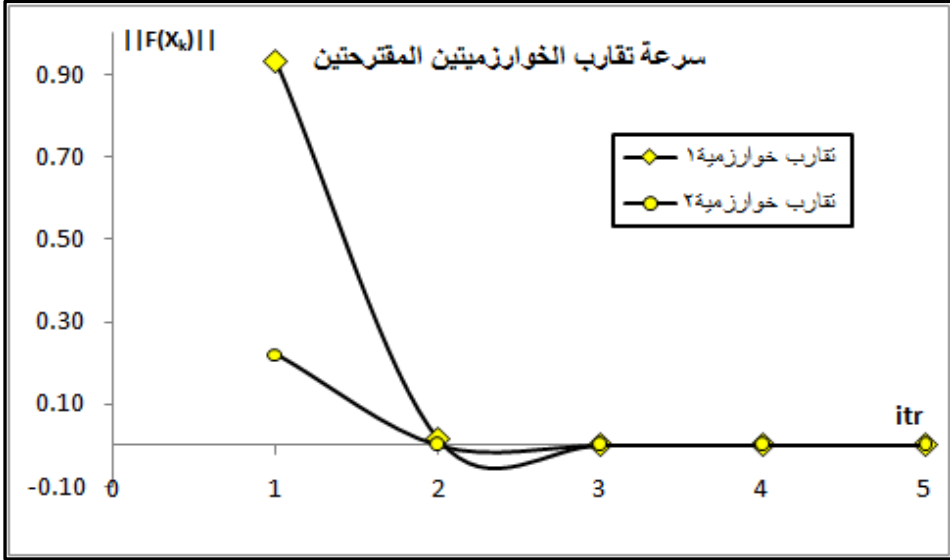
الجدول 9: إيجاد الحل التقريبي للمسألة (3) باستخدام طريقتي نيوتن وبروين .

k	طريقة بروين [12] Broyden		طريقة نيوتن [12] Newton	
	$\ F(X_k)\ $	الحل التقريبي X_k	$\ F(X_k)\ $	الحل التقريبي X_k
1	0.345851	(0.499869, 1.94669E-2, -0.521532)	0.345861	(0.49987, 0.0194668, -0.52152)
2	0.147794	(0.499986, 8.75788E-3, -0.5231746)	0.025889	(0.500014, 0.0015885, -0.523557)
3	0.0143688	(0.500006, 8.6722E-4, -0.5236918)	2.012E-4	(0.5, 0.0000124448, -0.523598)
4	9.8373E-4	(0.5000005, 6.0874E-5, -0.5235954)	1.254E-8	(0.5, 7.75786E-10, -0.523599)
5	2.3547E-5	(0.5000002, 1.4452E-6, -0.5235989)	5.76E-12	(0.5, 1.56003E-16, -0.523599)

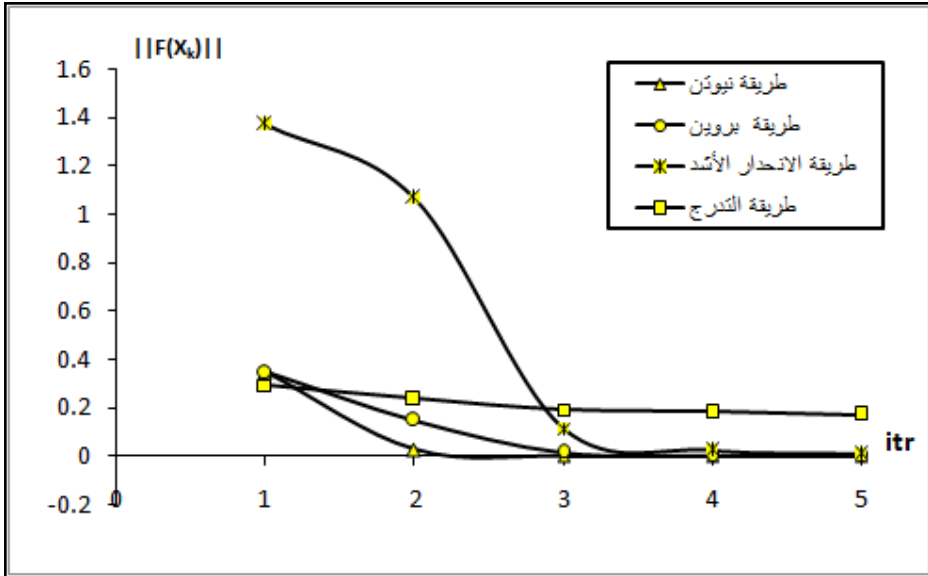
الجدول 10: إيجاد الحل التقريبي للمسألة (3) باستخدام طريقتي الانحدار الأشد .

k	طريقة التدرج [12] Gradient		طريقة الانحدار الأشد [12] Steepest Descent	
	$\ F(X_k)\ $	الحل التقريبي X_k	$\ F(X_k)\ $	الحل التقريبي X_k
1	0.292289	(0.597373, 0.00596386, -0.523756)	1.37029	(0.506560, 0.0051219, 0.428917)
2	0.236177	(0.56520, 0.010308, -0.519107)	1.06610	(0.504555, 0.0642198, -0.515581)
3	0.191858	(0.563674, 0.00453063, -0.524272)	0.115002	(0.506867, 0.001808, -0.517966)
4	0.181417	(0.558739, 0.00327779, -0.521411)	0.0240258	(0.506756, 1.208E-3, -0.523599)
5	0.171546	(0.556941, 0.00391872, -0.524233)	0.0099969	(0.503316, 2.654E-4, -0.523599)

طريقتان جديدتان لحل جمل المعادلات غير الخطية



الشكل(3): مخطط سرعة تقارب الخوارزميتين المقترحتين في إيجاد حل تقريبي للمسألة(3).



الشكل(4): مخطط سرعة تقارب طرائق: نيوتن، بروين، الانحدار الأشد، التدرج لحل المسألة(3).

مسألة 4: [8]: لتكن جملة المعادلات غير الخطية الآتية:

$$\begin{cases} x_1 - \cos(x_1 x_2 x_3) - 1 = 0 \\ \sqrt[4]{(1-x_1) + x_2 + 0.05 x_3^2 - 0.15x_3} - 1 = 0, X_0 = (-1, 1, 4)^T \\ -x_1^2 - 0.1x_2^2 + 0.01x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

نطبق الخوارزميتين المقترحتين للمسألة 4 بدءاً من النقطة X_0 ، وندرج نتائجنا في الجدولين (11) و(12). نسجل في الجدول (13) نتائج الحل العددي بطريقة نيوتن [12] Newton. بمقارنة نتائج الجداول (11)-(13) نتضح دقة وأفضلية نتائجنا. نرسم في الشكل (5) سرعتي تقارب الخوارزميتين المقترحتين، ونرسم في الشكل (6) سرعة تقارب طريقة نيوتن باستخدام المعيار $\|F(X_k)\|$.

الجدول 11: إيجاد الحل التقريبي للمسألة (4) باستخدام الطريقة المقترحة الأولى.

معدل التقارب Rate	$f_3(X_k)$	$f_2(X_k)$	$f_1(X_k)$	الحل التقريبي X_k	k
2.89841	-0.00881193	0.000675611	-0.00243214	(-0.00243211, 0.0996238, 0.99119)	1
6.50272	-2.82745E-6	-3.57381E-7	1.56135E-8	(1.56135E-8, 0.0999995, 0.999997)	2
19.3529	0	1.52656E-16	2.22045E-16	(1.90237E-16, 0.1, 1.)	3

الجدول 12: إيجاد الحل التقريبي للمسألة (4) باستخدام الطريقة المقترحة الثانية.

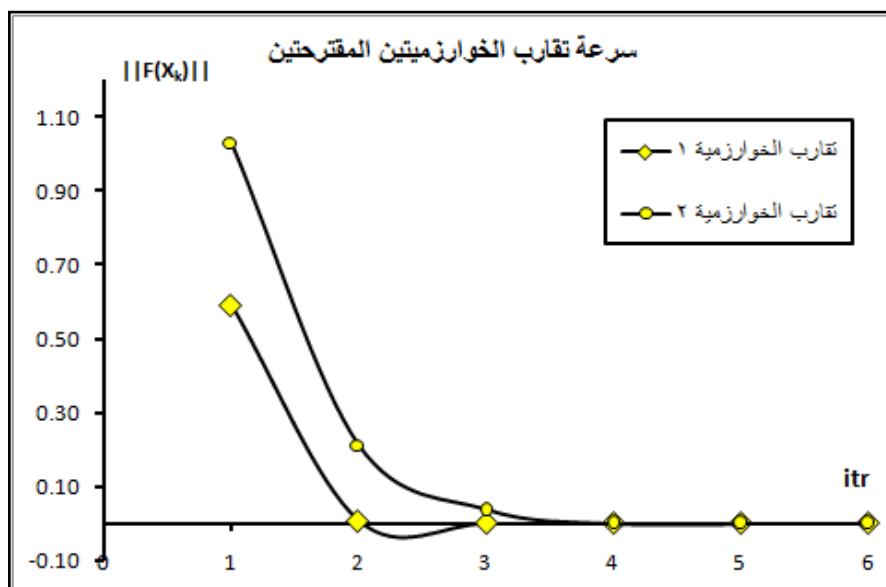
معدل التقارب Rate	$f_3(X_k)$	$f_2(X_k)$	$f_1(X_k)$	الحل التقريبي X_k	k
0.943738	-0.623139	0.683683	-0.457531	(-0.44177, 0.660714, 0.609069)	1
1.5773	0.0338245	-0.0414463	-0.206321	(-0.206317, 0.0140666, 1.07627)	2
1.74785	-0.0324409	-0.00775157	-0.0162879	(-0.0162869, 0.0865346, 0.967708)	3
3.78988	3.42942E-4	8.38735E-5	-7.60903E-4	(-0.0007609, 0.0999108, 1.00034)	4
7.90152	-2.8288E-7	2.96831E-8	-1.24564E-7	(-1.24564E-7, 0.1, 1.)	5
15.4979	2.30926E-14	-2.60902E-15	-5.2846E-17	(-5.29133E-18, 0.1, 1.)	6

الجدول 13: إيجاد الحل التقريبي للمسألة (4) باستخدام طريقة نيوتن [12].

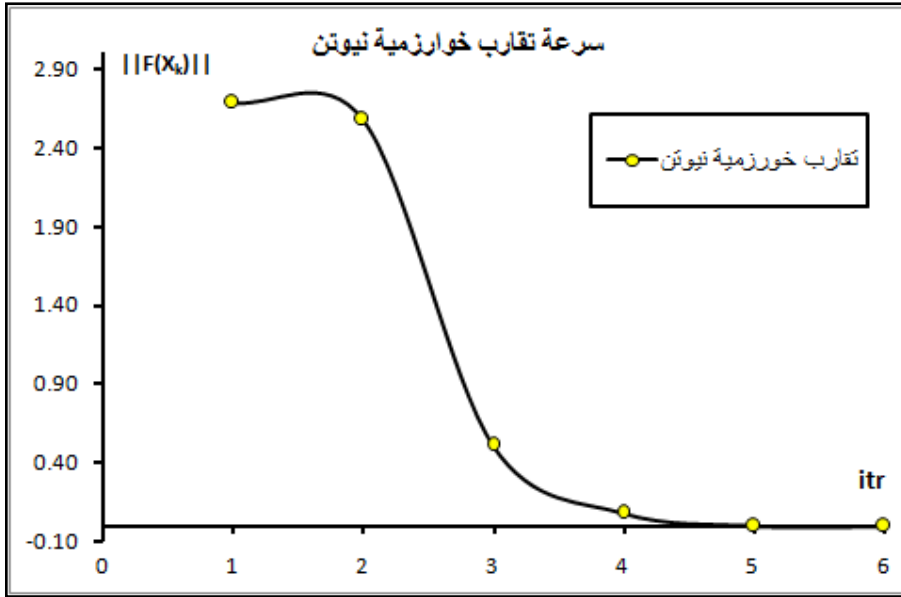
معدل التقارب Rate	$f_3(X_k)$	$f_2(X_k)$	$f_1(X_k)$	الحل التقريبي X_k	k
0.220077	-2.54136	0.709928	0.488102	(0.590752, 0.670379, -1.15413)	1
0.0411245	-2.37533	-0.333618	-0.937382	(-0.897142, -0.600453, -0.528409)	2

طريقتان جديدتان لحل جمل المعادلات غير الخطية

1.617000	-0.421905	0.056029	0.283126	(-0.283044,0.0687893,0.657994)	3
1.85184	-0.0801989	-0.00217066	0.00004217	(0.00004217,0.0935048,0.91974)	4
5.51776	-4.64917E-6	0.00032206	-4.4699E-12	(-4.47E-12, 0.100322, 0.999999)	5
10.3439	-1.03683E-8	9.9129E-14	8.5456E-17	(-7.13473E-17, 0.1, 1.)	6



الشكل(5): مخطط سرعتنا تقارب الخوارزميتين المقترحتين في إيجاد حل تقريبي للمسألة(4).



الشكل(6): مخطط سرعة تقارب خوارزمية نيوتن [12] في إيجاد لحل تقريبي للمسألة(4).

5-الخاتمة

قدّما طريقتين جديدتين لإيجاد الحلول التقريبية لجمل المعادلات غير الخطية، وتم توصيفهما بالخوارزميات المناسبة. طُبِّقَت الخوارزميتان لحل أربع مسائل اختبار مختلفة، وتفوقت في الدقة وسرع التقارب على بعض الطرائق مثل طريقة نيوتن[12]، برون [12]، سافاجو[9]، البحث الخطي [3]، الشبكات العصبية [6]، الانحدار الأشد [12]. بمقارنة النتائج المدرجة في الجداول (1)-(13) والأشكال البيانية (1)-(6) لسرع التقارب، تظهر دقة نتائجنا وتَفُوق الطريقتين المقترحتين على الطرائق الأخرى. لقد تميزت الطريقتان بإيجاد الحلول التقريبية بدقة عالية تضاهاي الحلول الدقيقة. نوصي باستخدام الطريقتين لأنهما يستطيعان إيجاد الحلول التقريبية أيا كان شكل المعادلة المطروحة.

(References) المراجع

- [1] AMAYA I., J. CRUZ, R. CORREA, Real Roots of Nonlinear Systems of Equations Through a Metaheuristic Algorithm, University Industrial de Santander, No. 170, 2011, pp. 15-23.
- [2] ARDELEAN, G., The Attraction Basins Of Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations, Ph.D. Thesis, Technical University of Cluj-Napoca, North University Center at Baia Mare, Faculty of Sciences, 2012, pp. 1-56.
- [3] GROSAN C., A. Abraham, T. Norway, Multiple Solutions for a System of Nonlinear Equations, International Journal of Innovative, Computing, Information and Control, Vol. x, No. x, 2008, pp. 1-12.
- [4] HAO W., ANDREW J. Z. ZENG, An algorithm and Software for Computing Multiplicity Structures At Zeros of Nonlinear Systems, ACM Transactions on Embedded Computing Systems, Vol. V, No. N, pp. 1-16, 2012.
- [5] JONES B. and S. IYENGAR, Approximate Root Isolation for Nonlinear Systems by Monte-Carlo, Computers Math. Applic. Vol. 27, No. 7, 1994, pp. 1-5.
- [6] MARGARIS A. and K. GOULIANAS, Finding All Roots of 2×2 Nonlinear Algebraic Systems Using Back-Propagation Neural Networks, Neural Comput & Applic, Springer-Verlag London Limited, 2010, pp. 1-14.
- [7] RAHIMIAN S. K., F. JALALI, J.D. SEADER, R.E. WHITE, A new Homotopy For Seeking All Real Roots of A Nonlinear Equation, Computers and Chemical Engineering 35, 2011, pp.403-411.
- [8] RAMADAS, G.C.V., Rocha A.M.A.C. and Fernandes E.M.G.P, Testing Nelder-Mead Based Repulsion Algorithms for Multiple Roots of Nonlinear Systems via a Two-Level Factorial Design of Experiments, Centre for Research & Development in Mechanical Engineering, Portugal., 2015, pp. 1-30.
- [9] SAVAGEAU M. A., Finding Multiple Roots of Nonlinear Algebraic Equations Using S-System Methodology, *Applied Mathematics And Computation* 55, 1993, pp.187-199.
- [10] Silva RMA, Resende MGC, and Pardalos PM, Finding multiple roots of a box-constrained system of nonlinear equations with a biased random-key genetic algorithm, Journal of Global Optimization Vol. 60 No.2, 2014, pp. 289–306.

- [11] TSOULOS I.G., A. STAVRAKOUDIS, On Locating All Roots of Systems of Nonlinear Equations Inside Bounded Domain Using Global Optimization Methods, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 11 ,2010, pp. 2465-2471.
- [12] BURDEN, R. L. and J. D. FAIRES, *Numerical Analysis*, PWS-KENT publishers, Boston Massachusetts, (1993), pp. 527-558.
- [13] MAHMOUD, S. M., ALI S. M. and Motaweg, M. A Conjugate Gradient Method for Solving Unconstrained Optimization problems, *Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series* Vol. 35 No 3, 2013.
- [14] MENDONCA M.W., *Multilevel Optimization: Convergence Theory, Algorithms and Application to Derivative-Free Optimization*, Thesis Ph.D., Presses university, Namur & Melissa Weber Mendonça, Belgique, 2009.